Examen General de Geometría Algebraica 2025-1.

(Enero 2025)

Instrucciones: El examen dura 4 horas. Elija y resuelva 5 (y sólo 5) de los problemas siguientes. Cada uno de los problemas tiene el mismo valor de 2 puntos. Es necesario obtener 6 de calificación para aprobar el examen y, en ausencia de errores de escritura, 9.5 para obtener mención honorífica.

En los problemas 1, 2, 3, 4, 5 y 6, K denota un campo algebraicamente cerrado de característica cero.

1. Encontrar las tres componentes irreducibles del conjunto algebraico afín dado por

$$\mathcal{V}(5x^2 - y^3z, xz - 5x) = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3_K \colon 5x^2 - y^3z, xz - 5x = 0\}$$

2. Demostrar que $f : [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1]$ define una aplicación birracional de $\mathbb{P}^2_K$ en sí mismo. Encontrar abiertos U y V en $\mathbb{P}^2_K$ tales que la restricción de f a U induzca un morfismo birregular entre U y V.

3. Sea X el lugar de ceros de $xy(x - y)$ en $\mathbb{A}^2_K$. Encuentre los puntos singulares de X y calcule el espacio tangente de Zariski a X en esos puntos.

4. Considere el conjunto algebraico afín

$$X = \mathcal{V}(xw - yz) \subseteq \mathbb{A}^4_K$$

   Muestre que $X \cap \mathcal{V}(x)$ es la unión de dos planos y que ambos tienen codimensión 1 en X.

5. Usando argumentos de dimensión, demuestre que si $f, g \in K[x, y]$ son coprimos, entonces $\mathcal{V}(f) \cap \mathcal{V}(g) \subseteq \mathbb{A}^2_K$ es un conjunto finito. *Sugerencia*: Muestre que $\mathcal{V}(f) \cap \mathcal{V}(g) \subsetneq \mathcal{V}(f)$.

6. Describa la dilatación (blow-up o explosión) $B_{(0,0)}$, con centro en el origen, de la cúbica $V = V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2_K$. En particular, describa la transformada estricta $\widetilde{V} = \overline{\pi^{-1}(V - 0)}$. Aquí, $\pi : B_{(0,0)}\mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^2_K$ es la proyección de la dilatación de $\mathbb{A}^2$ en el origen.

7. Muestre que la curva de Fermat $F = \mathcal{V}(x^m + y^m - 1)$ es no singular en todos sus puntos si la característica del campo K sobre la que está definida no divide a m. Si la característica de K divide a m, muestre que el polinomio que define a F tiene factores múltiples. ¿Qué pasa en este caso con los puntos de F?

¡SUERTE!