Examen General de Geometría Diferencial 2025-1.

(Enero 2025)

Instrucciones: El examen dura **4 horas**. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor. Es necesario resolver correctamente 3 ejercicios para aprobar y tener 4 ejercicios correctos para obtener mención honorífica.

1. Sea $\mathbb{P}^2 = \mathbb{S}^2/\sim$ el plano proyectivo real, donde $(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$,

   (a) Sean q un valor regular de $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $M = g^{-1}(q)$. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ diferenciable. Demuestre que para todo $p \in M$, $\ker d_p(f|M) = \ker D(f, g)_p$, donde (f, g) denota la función $p \mapsto (f(p), g(p))$ y $D(\cdot)_p$ es la derivada usual en el punto p de funciones definidas en $\mathbb{R}^n$.

   (b) Defina $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ por $f([x, y, z]) = (yz, xz, xy)$. Muestre que f no es una inmersión en precisamente 6 puntos.

   (c) Defina $F : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ por $F([x, y, z]) = (x^2 - y^2, yz, xz, xy)$. Muestre que F es un encaje .

2. Pruebe el *teorema de la divergencia*: Sea M una variedad riemanniana orientada con frontera. Sea ν la corespondiente forma de volumen en M. La fontera ∂M tiene la métrica riemanniana y la orientación inducidas, con forma de volumen ω. Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ con soporte compacto y N el campo unitario normal a ∂M que apunta hacia afuera, entonces

$$\int_M \operatorname{div} X \ \nu = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle \ \omega$$

   Sugerencia: Recuerde que, para $X \in \mathfrak{X}(M)$, ∇X define un operador en T_pM dado por $z \mapsto \nabla_z X$, y su traza es, por definición, $\operatorname{div} X(p)$. Para un marco móvil $\{E_i\}$ tenemos $\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle$. Sean $p \in M$ y $\{E_i\}$ un marco móvil geodésico en p, es decir, $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ para todo i, j, con la orientación de M y $\{\theta_i\}$ el marco móvil dual. Así $\nu = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n$ y luego $i(X)\nu = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \theta_i(X) \eta_i$, donde $\eta_i = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\theta_i} \wedge \cdots \wedge \theta_n$, y donde i denota la contracción $i(X)\nu(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \nu(X, X_1, \ldots, X_{n-1})$. Se tiene que $d\theta_i(p) = 0$ y $d\eta_i(p) = 0$. Obtenga

$$d(i(X)\nu)(p) = \sum_{i=1}^{n} E_i(\theta_i(X))(p)\nu(p) = \operatorname{div} X(p)\nu(p).$$

3. Considere un campo tensorial simétrico $A \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ en la variedad riemanniana (M, g) de dimensión m. Recuerde que

$$\operatorname{div} A(X) = \sum_{i=1}^{m} \nabla_{E_i} A(X, E_i)$$

   donde $E_1, \ldots, E_m$ es un marco móvil local.

   (a) Demuestre que para $\lambda \in C^\infty(M)$,

$$\operatorname{div}(\lambda A)(X) = \lambda \operatorname{div} A(X) + A(\nabla \lambda, X).$$

(b) (M,g) se llama *de Einstein* si y sólo si $Ric = \lambda g$ con $\lambda \in C^\infty(M)$. Utilice la identidad $dS = 2\operatorname{div} Ric$ donde S es la curvatura escalar, para demostrar que si M es conexa y de Einstein con $m \geq 3$, entonces λ es constante.

(c) Demuestre que si M es conexa y de Einstein, con dimensión $m = 3$, entonces M tiene curvatura seccional constante.

4. Sea $(\tilde{M}, g)$ variedad riemanniana con conexión de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$. Sea M una subvariedad de $\tilde{M}$, con la métrica inducida por restricción de g y sea ∇ la conexión de Levi-Civita correspondiente. Denotemos por $\mathfrak{X}(M)^\perp$ al conjunto de campos vectoriales en una vecindad de M que son ortogonales a M en cada punto.

   (a) Muestre que la transfomación $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por $B(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ es C^∞ bilineal y simétrica por lo que $B(X,Y)(p)$ solo depende de $X(p), Y(p)$.

   (b) Suponga que $\dim(\tilde{M}) = \dim M + 1$ y sea N un campo unitario local, normal a M. $II_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por $II_p(x,y) = g_p(B_p(x,y), N(p))$ se llama la segunda forma fundamental de M.

   Muestre que $S_p(x) := -\tilde{\nabla}_x N(p) \in T_pM$ para $x \in T_pM$ y que $II_p(x,y) = g_p(S_p(x), y)$.

   (c) Si II_p es un múltiplo de g_p decimos que p es un punto umbílico. Suponga que todos los puntos de la hipersuperficie conexa $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ son umbílicos y demuestre que M es una porción de una esfera o un hiperplano. *Sugerencia*: Utilice el hecho de que, para la métrica euclidiana, $\tilde{\nabla}$ es la derivada usual, para demostrar que II es un múltiplo constante de la métrica euclidiana.

¡SUERTE!