EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD
SEMESTRE 2025-I, ENERO DE 2025

Duración: 6 horas
Instrucciones:
1. La calificación aprobatoria mínima es de 5 puntos.
2. Cada problema vale 1 punto.
3. Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
4. Puede suponer cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X = (X_1, X_2)$ una función definida en Ω con valores en $\mathbb{R}^2$. Pruebe que X es (Borel) medible si y sólo si X_1 y X_2 lo son.

Problema 2. Sean $-\infty < a < b < \infty$ y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que existen $M > 0$ y $K > 0$ tal que si se define $g(x) = K(f(x) + M)$ para toda $x \in [a, b]$, entonces g es una función de densidad en $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$.

Problema 3. Usando el siguiente Teorema:
Teorema [Inversión] *Sea X una variable variable con función de distribución F_X y función característica φ. Entonces*

$$F_X(a+h) - F_X(a-h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin(ht)}{t} e^{-iat} \varphi(t)dt, \tag{1}$$

para todas $a \in \mathbb{R}$, $h > 0$, tales que $a + h$ y $a - h$ son puntos de continuidad de F_X.
Probar el siguiente resultado:
3.1 Sea X variable aleatoria con función de distribución F_X y función característica φ. Si $a < b$ son dos puntos de continuidad de F_X. Entonces

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)dt. \tag{2}$$

Sugerencia: Dé una fórmula para $e^{i\tau} - e^{-i\tau}$ en el caso en que $\tau \in \mathbb{R}$, úsela en el teorema anterior cuando $h = (b-a)/2$ y defina x adecuadamente.
3.2 Usando el inciso anterior, y haciendo que $a \to -\infty$, demuestre el **Teorema de Unicidad** que dice que lo siguiente. Para X y Y variables denote a sus funciones de distribución F_X y F_Y, y sus funciones características φ_X y φ_Y, respectivamente. Si $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}$, entonces $F_X(x) = F_Y(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Problema 4. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria no-negativa y de esperanza 1. Defina a

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(X 1_A).$$

Pruebe que $\mathbb{Q}$ es una medida de probabilidad y que si (Y_n) converge en probabilidad a Y en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, entonces también lo hace en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5.

5.1 Escriba las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov y las ecuaciones forward y backward para una cadena de Markov a tiempo continuo, definiendo cuidadosamente todos los elementos matemáticos utilizados.

5.2 Diana se mueve entre su casa (C), su escuela (E) y la gimnasia (G) como una cadena de Markov a tiempo continuo. A tasa 3 sale de su casa y con probabilidad 2/3 va a su escuela y con probabilidad 1/3 va a la gimnasia. De la escuela sale a tasa 4 y con la mismas probabilidades se va a su casa o a la gimnasia. Y ya que sale de la gimnasia (lo cual hace a tasa 1), se va directo a su casa. ¿A tiempos grandes, que proporción de tiempo pasa en cada lugar?

Problema 6. Sea X una martingala acotada en L^2, es decir $\mathbb{E}[X_n^2] \leq K$, para toda n. Demuestre que existe $\lim_{n\to\infty} X_n = Y$ y que $Y < \infty$ casi seguramente.

Problema 7. Sea $S = (S_n, n \in \mathbb{N})$ una caminata aleatoria con saltos acotados. Sea $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ su filtración canónica y defina a

$$\varphi(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda S_n}).$$

7.1 Pruebe que $0 < \varphi(\lambda) < \infty$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$.

7.2 Defina a $M_n = e^{\lambda S_n} \varphi(\lambda)^{-n}$. Pruebe que M_n es una martingala.

7.3 Si $A \in \mathcal{F}_n$, defina $\mathbb{Q}_n(A) = \mathbb{E}(M_n 1_A)$. Muestre que $\mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}_m$ sobre $\mathcal{F}_m$.

7.4 Muestre que bajo $\mathbb{Q}_n$, $(S_m, m \leq n)$ es una caminata aleatoria y caracterice a su distribución de saltos.

Problema 8.

Demuestre que cualquier proceso de Markov, $X := \{X_t : t \geq 0\}$, caracterizado por una función de transición homogénea en el tiempo, y distribución inicial y estacionaria dada por π, es un proceso estrictamente estacionario.