Problemas para Examen General de Medios Continuos

1. Sea el sistema de tres partículas puntuales de masa m en el plano. La posición de cada partícula es $z_j = [x_j, y_j] \in \mathbf{R}^2$, $j = 1, 2, 3$. Sea también el Langrangiano L

$$L = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^{3} ||\dot{z}_j||^2, \tag{1}$$

$|| \cdot ||$ la norma Eulideana en el plano. Supón además que las trayectorias de las tres partículas satisfacen el contorno holónomico

$$\det(z_2 - z_1, z_3 - z_1) = C, \tag{2}$$

$C \neq 0$, con $\det(u, v)$ el determinante de una matriz 2×2 con columnas u, $v \in \mathbf{R}^2$. Considere la evolución del sistema según la teoría del contorno ideal.

   (a) Dar la interpretación geométrica del contorno. Escribir el Langrangiano del sistema restringido según la teoría de contornos ideales. (La expresión debe mostrar claramente las variables y las velocidades correspondientes, no es necesario simplificarla.)

   (b) Mostrar que el Langrangiano L de (1), y el contorno (2) son invariantes bajo (i) translación de las tres particulas por el mismo vector, i.e. $z_j \mapsto z_j + a$, $j = 1, 2, 3$, con $a \in \mathbf{R}^2$ arbitrario, y (ii) rotación de las tres particulas por la misma matriz de rotación, i.e. $z_j \mapsto Az_j$, $j = 1, 2, 3$, con $A \in SO(2)$ arbitraria.

   (c) Mostrar la conservación de (i) $P = \sum_{j=1}^{3} m\dot{z}_j$ (momento total), y (ii) $M = m\sum_{j=1}^{3} \det(z_j, \dot{z}_j)$ (momento angular total). Supon que las trayectorias del sistema reducido de (a) existen, y definen el multiplicador de Lagrange, para cada t real. Como se modifica el resultado si esta suposición no se cumple para todo t real ?

2. Considera El doble péndulo plano:

   a) En las coordenadas polares, $\vec{x}_1 = (l_1 \sin\theta_1, -l_1\cos\theta_1)$, $\vec{x}_{12} = (l_2\sin\theta_2, -l_2\cos\theta_2)$, de las coordenadas relativas y con $\vec{g} = (0, -g)$, demuestra que el Lagrangiano se puede escribir de la siguiente manera,
   $L(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}} \cdot \vec{T}\dot{\vec{q}} - V(\vec{q})$, con $\vec{q} = (\theta_1, \theta_2)$ y

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 \end{pmatrix},$$

   y $V(\theta_1, \theta_2) = -(m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 - m_2 g l_2 \cos\theta_2$.

   b) Escribe las ecuaciones de Euler-Largrange.

   c) Considera el caso $m_1 = m_2 = m$ y $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ y encuentra las frecuencias características del equilibrio estable $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Da una interpretación de las fecuencias.

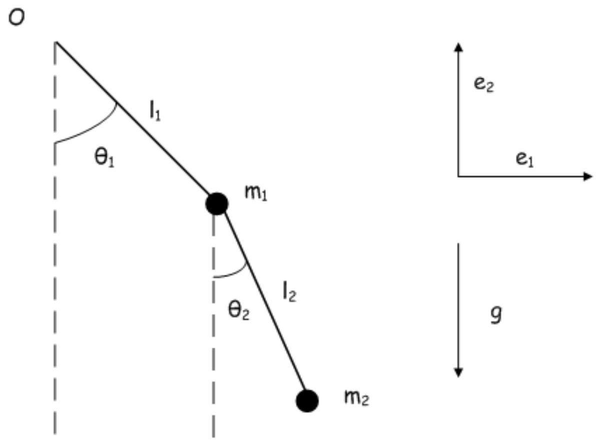

Figura 1: Doble péndulo plano.

3. Tres partículas de masa m iguales giran alrededor de una trayectoria circular en el plano de radio R, las partículas giran a una velocidad angular ω y las partículas están uniformemente distribuidas en el círculo. Una cuarta partícula, cuya masa es muchísimo menor que las masas de las tres partículas está en el mismo plano de las tres partículas. Suponiendo que la masa de la cuarta partícula la hacemos tender a cero:

    a) Escriba las ecuaciones de movimiento de la cuarta partícula respecto a un sistema rotante que gira a velocidad angular ω alrededor del centro de masa de las tres partículas de masa m.

    b) Determine los puntos de equilibrio de este sistema de ecuaciones en el sistema rotante.

    c) Determine la estabilidad de estos puntos fijos en el sistema rotante.