

Examen General. Teoría de las Gráficas
Semestre 2025-1

Duración: 4 horas. Resolver 6 ejercicios de los siguientes 9. Cada ejercicio vale $\frac{5}{3}$ puntos y la calificación mínima para aprobar es 6. (Si se entregan más de 6 ejercicios, se calificará sobre los 6 ejercicios de menor puntaje).

1.-

i) Muestra que toda gráfica simple G con valencia mínima $\delta(G) \geq 2$ contiene un ciclo de longitud al menos $\delta(G) + 1$.

ii) Para cada $k \geq 2$ encuentra una gráfica simple G tal que $\delta(G) = k$ y no contiene un ciclo de longitud mayor que $\delta(G) + 1$.

2.- Demuestra que si una digráfica fuertemente conexa contiene un ciclo impar (no necesariamente dirigido) entonces contiene un ciclo impar dirigido.

3.- Sea B un bloque de una gráfica G , y sea P una xy -trayectoria en G tal que los vértices x, y están en B . Muestra que P esta contenida en B .

4.- Demuestra que toda gráfica 3-conexa (por vértices) no bipartita contiene al menos cuatro ciclos de longitud impar.

5.-

i) Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica plana conexa de cuello k , donde $k \geq 3$. Muestra que $|E(G)| \leq \frac{k(|V(G)|-2)}{k-2}$.

ii) Deduce que la gráfica de Petersen no es plana.

6.- Sea $KG_{m,n}$ la gráfica de Kneser y $\alpha(KG_{m,n})$ su número de independencia. Muestra que $\alpha(KG_{m,n}) \geq \binom{n-1}{m-1}$.

7.- Sea G una gráfica de orden n libre de triángulos, $\alpha'(G)$ su número de emparejamiento y $\chi(G^c)$ el número cromático del complemento de G . Demuestra que $\alpha'(G) = n - \chi(G^c)$.

8.- Sea M un emparejamiento maximal en una gráfica G , y sea M^* un emparejamiento máximo en G . Muestra que $|M| \geq \frac{|M^*|}{2}$.

9.- Sea G una gráfica vértice transitiva de orden primo. Muestra que G es hamiltoniana.