Examen general de Topología Algebraica 2025-1

Posgrado en Ciencias Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Este es un examen de 100 puntos. Para aprobar el examen se requiere un mínimo de 75 puntos; y para obtener mención en el examen, un mínimo de 90 puntos. El tiempo para resolver el examen es de 4 horas.

¡Éxito!

Ejercicio 1. (20 puntos) Demuestra usando teoría de cubrientes que un grupo es libre si y sólo si actúa de manera libre en un árbol (un árbol es una gráfica conexa sin ciclos).

Ejercicio 2. (20 puntos) Muestra que el toro $T = S^1 \times S^1$ y la cuña $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ tienen grupos de homología isomorfos en todas las dimensiones pero que tal propiedad no se preserva en sus cubrientes universales.
Pista: para la parte de cubrientes primero construye el cubriente universal de $S^1 \vee S^1$, para luego construir el cubriente universal de $S^1 \vee S^1 \vee S^2$.

Ejercicio 3. (20 puntos) Usando el teorema de van Kampen calcula los grupos fundamentales de:

(a) El bitoro $S_2 = T\#T$.

(b) La Botella de Klein.

Ejercicio 4. (20 puntos) Sea X un espacio CW-complejo conexo finito, es decir, tiene un número finito de células. Demuestra que los grupos de homología entera son grupos abelianos finitamente generados.

Ejercicio 5. (20 puntos) Si $f : S^n \to S^n$ no tiene puntos fijos, entonces $\deg f = (-1)^{n+1}$.