

Examen General de Topología Diferencial

2025-1

Posgrado en Ciencias Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Instrucciones.

- *Este examen tiene 6 problemas, cada uno de ellos vale 20 puntos.*
- *Para aprobar el examen se requiere de un mínimo de 70 puntos (90 puntos o más es aprobado con mención honorífica).*
- *El tiempo para resolver el examen es de 4 horas.*
- *Justifica claramente sus respuestas.*

1. Supongamos que M y N son variedades diferenciales con o sin frontera, y sea $f: M \rightarrow N$ aplicación diferenciable. Muestra que $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es la aplicación 0 para cada $p \in M$ si y solo si f es constante en cada componente de M .
2. Definamos una aplicación $p: SO(n+1) \rightarrow S^n$ dada por

$$p(g) = g \cdot e_0,$$

donde e_0 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Muestra que p es suave, y que la imagen inversa de un punto es una subvariedad de $SO(n+1)$ difeomorfa a $SO(n)$.

3. Sean M una variedad orientable y $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave para la cual 0 es valor regular. Prueba que la subvariedad $f^{-1}(0)$ también es orientable.
4. Muestra que el *grupo unitario especial* definido por

$$SU(n) = \{A \in \text{Mat}_n \mathbb{C} \mid A \cdot \overline{A}^t = \text{Id}_n \text{ y } \det(A) = 1\}$$

es una subvariedad diferenciable compacta de $\text{Mat}_n \mathbb{C}$. ¿Cuál es su dimensión?

5. Supongamos que $f: X \rightarrow M$ y $g: Y \rightarrow M$ son aplicaciones suaves transversales entre sí ($f \pitchfork g$), es decir,

$$T_{f(x)}M = df_x(T_xX) + dg_y(T_yY)$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$ tales que $f(x) = g(y)$. Muestra que

$$X \times_M Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

es una subvariedad diferenciable encajada en $X \times Y$.

6. Considera a S^3 como la esfera unitaria en $\mathbb{C}^2$, es decir,

$$S^3 = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\}.$$

Sea $f: S^3 \rightarrow S^3$ dado por $f(a, b) = (a^2, b^2)$. ¿Cuál es el grado de f ?
 ¿Todos los puntos tienen el mismo número de preimágenes?