

Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Topología General Semestre 2025-1

Instrucciones

- La duración del examen es de 4 horas.
- El examen consta de 6 preguntas, cada una con un puntaje asignado.
- El total de puntos es 14. Para aprobar el examen es necesario obtener al menos 9 puntos. Para recibir mención honorífica es necesario obtener al menos 12 puntos.

Preguntas:

1. **(2 puntos)** Sean $I = [0, 1]$ y considere $Y = I \cup \{\xi\}$, donde $\xi \notin I$ con la topología cociente determinada por $p : [-1, 1] \rightarrow Y$, donde $p(x) = |x|$ si $x \neq -1$ y $p(-1) = \xi$. Demuestra que p es una función abierta y que Y no es Hausdorff. ¿Es Y conexo?
2. **(2 puntos)** Considera la topología en la recta real que se obtiene tomando como un sistema de vecindades básicas en cada x a los conjuntos $U_n(x) = \{x\} \cup \{y : y \in \mathbb{Q} \wedge |y - x| < \frac{1}{n}\}$, donde n es un entero positivo. Demuestra que este espacio no es regular pero cada par de puntos distintos tienen vecindades cuyas cerraduras no se intersectan.
3. **(3 puntos)** Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff y sea $f : X \rightarrow X$ una función continua. Prueba que existe un subconjunto cerrado y no vacío C de X tal que $f(C) = C$.
4. **(3 puntos)** Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $X_i = \mathbb{R}$. Definimos $\mathbb{R}^\omega = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Considera $\mathbb{R}$ con su topología usual.
 - a) Prueba que $\mathbb{R}^\omega$ con la topología producto no es homeomorfo a $\mathbb{R}^\omega$ con la topología de la caja.
 - b) Define $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ como $f(x) = (x, x, x, \dots)$. ¿Es f continua cuando $\mathbb{R}^\omega$ tiene la topología producto? ¿Es f continua cuando $\mathbb{R}^\omega$ tiene la topología de la caja?
5. **(2 puntos)** Sea X un espacio localmente conexo y $A \subset X$. Si $\text{Fr}(A)$ es localmente conexa, demuestra que $\overline{A}$ es localmente conexo.
6. **(2 puntos)** Sea X un espacio topológico localmente compacto, es decir, el espacio cumple que para cada $x \in X$ existe un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y $\overline{U}$ es un subconjunto compacto de X . Prueba que si X es conexo, entonces para cada par de puntos $x, y \in X$ existe un subconjunto compacto A de X tal que $x, y \in A$.