Análisis de Fourier aplicado al estudio de ecuaciones de evolución

Profesor: Dr. Felipe Angeles García
Investigador Posdoctoral, IIMAS-UNAM

Tipo de curso: Temas selectos.
Horas por semana: 4.5 hrs.

1 Objetivos

El objetivo del curso es dar una presentación detallada de las herramientas de análisis de Fourier que son de uso frecuente en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales de evolución. El alumno se familiarizará con el concepto de soluciones débiles para ecuaciones de evolución y con la formulación integro-diferencial de un problema de Cauchy. Profundizaremos en el estudio de estimaciones de dispersión para ecuaciones de Schrödinger no-lineales. Estudiaremos el comportamiento asintótico de soluciones a ecuaciones de evolución que satisfacen una desigualdad de *energía* a través del método de separación de Fourier (The Fourier Splitting Method).

2 Temario

1. **Fundamentos de Teoría de Distribuciones:** Cálculo distribucional, espacio de Schwartz $\mathcal{S}$, espacio de distribuciones temperadas $\mathcal{S}'$, transformada de Fourier sobre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$, distribuciones con soporte compacto, teorema de Paley-Weiner-Schwartz, desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev, espacios de Sobolev homogéneos y no-homogéneos.

2. **Ecuación de calor en espacios de Sobolev homogéneos:** Algunos resultados clásicos de la ecuación de calor, formulación débil del problema de Cauchy en el espacio de distribuciones temperadas, estimaciones de energía y alta regularidad en espacios de Sobolev homogéneos.

3. **Ecuaciones dispersivas y estimaciones de Strichartz**: Estimaciones de dispersión para la ecuación de Schrödinger, integrales de funciones oscilatorias, estimaciones dispersivas para la ecuación de onda, métodos bilineales y argumento TT^*, aplicaciones a ecuaciones de Schrödinger semilineales.

4. **Soluciones de Leray-Hopf para las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles:** Discusión del concepto de solución débil para las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles, método de regularización de Friedrichs, unicidad de soluciones débiles en dos dimensiones espaciales, soluciones fuertes y teorema de Prodi-Serrin, regularidad parcial, desigualdad de energía, decaimiento asintótico de soluciones débiles y método de separación de Fourier (Fourier Splitting Method).

3 Evaluación:

El curso se evaluará con la entrega de cuatro tareas, una por cada bloque. La presentación de las tareas será en un PDF LaTex.

4 Referencias:

- Bahouri, H., Chemin, J. Y., & Danchin, R. (2011) *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations* Berlin: Springer.

- Bedrossian, J. and Vicol V. (2022) *The Mathematical Analysis of the Incompressible Euler and Navier-Stokes Equations* American Mathematical Society.
- Bhattacharyya, P. K. (2012) *Distributions: Generalized functions with applications in Sobolev spaces* Walter de Gruyter.
- Grafakos, L. (2024) *Fundamentals of Fourier Analysis* Springer.
- Lemarié-Rieusset, P. G. (2023) *The Navier-Stokes problem in the 21st century.* CRC Press.
- Linares, F. and Ponce, G. (2014) *Introduction to nonlinear dispersive equations* Springer.
- Mitrea, D. (2013) *Distributions, partial differential equations and harmonic analysis* New York: Springer.
- Schonbek, M.E. (1985) L^2 *decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Archive for rational mechanics and analysis, 88, 209-222.