

# Temario "Variedades Positroides" semestre 2026-1

Lara Bossinger

Mayo 2025

## 1 Resumen

Una variedad de Richardson es la intersección, dentro de la variedad bandera  $GL_n/B_+$ , de una célula de Schubert  $(B_-uB_+)/B_+$  y una célula opuesta de Schubert  $(B_+wB_+)/B_+$  (o la intersección similar de variedades de Schubert). En este curso, estudiemos una visión general de lo que se sabe sobre (1) anillos de coordenadas homogéneos de variedades de Richardson, sus bases y degeneraciones (2) parametrizaciones de variedades de Richardson utilizando variedades de Bott-Samelson (3) las descomposiciones de Deodhar del múltiple y de las variedades de Richardson dentro de ella y (4) positividad total en la variedad bandera. También ofrecemos una visión general de la combinatoria de las variedades positroides, sus relaciones con las variedades de Richardson, y cómo se parametrizan mediante grafos plábicos. La mayor parte de este de los trabajos de otros autores de los últimos cuarenta años, pero también hay algunos algunos resultados originales de menor importancia: Por ejemplo, que los anillos de coordenadas de variedades abiertas de Richardson son UFD, que la descomposición de Deodhar de Deodhar no es una estratificación en Lie tipo A y descripciones explícitas de la descomposición de Deodhar en términos de rangos de submatrices.

En la última parte del curso nos enfocaremos en las aplicaciones de las variedades positroides. Estudiemos la Grassmanniana positiva  $Gr_{k,n}^{\geq 0}$  es el subconjunto de la Grassmanniana real en el que todas las coordenadas de Plücker son no negativas. Posee una bella estructura combinatoria, así como conexiones con la física estadística, los sistemas integrables y las amplitudes de dispersión. El amplituhedron  $\mathcal{A}_{n,k,m}(Z)$  es la imagen de la Grassmanniana positiva  $Gr_{k,n}^{\geq 0}$  bajo un mapa lineal positivo  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{k+m}$ . Explicaremos cómo las ideas de los matroides orientados, la geometría tropical y las álgebras de conglomerado arrojan luz sobre la estructura de la Grassmanniana positiva y el amplituhedro.

## 2 Temario

1. Antecedentes
  - (a) El grupo simétrico
  - (b) Geometría algebraica
  - (c) Grassmannianas y variedades de bandera
  - (d) Variedades de Schubert y Richardson
  - (e) Variedades positroides

2. Descomposición Deodhar
  - (a) Las piezas Deodhar
  - (b) Formulas de productos matriciales
  - (c) No estratificación
3. Positividad total
  - (a) Subespacios totalmente no negativos y banderas
  - (b) Complejos de celulas y positividad total
  - (c) Positividad total en variedades de bandera parciales
4. Positroides
  - (a) Consecuencias del caso de variedades de bandera parciales
  - (b) Permutaciones afines
  - (c) Matrices de rango ciclicos
  - (d) Collares de Grassmann
  - (e) Clases de cohomología
5. Graficas plabis
  - (a) La medida de la frontera
  - (b) Caminos zig zag
  - (c) El twist y sus consecuencias
6. Amplituhedro
  - (a) Aplicación momento, azulejos positroides, la Grassmanniana positiva tropical
  - (b) Amplituhedro y la estratificación de signos
  - (c) Aplicación de amplituhedro y particiones planas
  - (d) T-dualidad
  - (e) Álgebras de conglomerado

### 3 Bibliografía

- S Richardson varieties, projected Richardson varieties and positroid varieties, David E Speyer, arXiv:2303.04831 [math.AG]
- W The positive Grassmannian, the amplituhedron, and cluster algebras, Lauren K. Williams, arXiv:2110.10856 [math.CO]

### 4 Requisitos

La asistencia al curso requiere los siguientes conocimientos previos.

**Cursos básicos:** Álgebra moderna, Álgebra conmutativa, Geometría Algebraica

Se recomiendo conocimiento previo en variedades de banderas, teoría de Lie y álgebras de conglomerado