TOPOLOGÍA ARITMÉTICA

Topología Aritmética concierne las analogías estructurales entre la teoría de números algebraicos y la teoría de 3-variedades, establecidas al demostrar teoremas en el contexto de 3-variedades que son contrapartes de teoremas de la teoría de números algebraicos.

El tema se nació por la observación, debida a D. Mumford y B. Mazur, que las dimensiones cohomologicas[1]

$$\dim \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = 3, \quad \dim \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) = 1$$

nos permite ver $\mathbb{Z}$ como un análogo aritmético de S^3 y el encaje $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ como un analogo de un nudo $S^1 \hookrightarrow S^3$.

Prerequisitos: Teoría de Galois, Topología Algebraica (grupo fundamental, (co)homología).

Ayudará tener conocimiento de la teoría de nudos y/o la teoría de números algebraicos, pero no se requiere: el curso presentará una introducción rápida a cada tema.

1. Introducción a 3-variedades y nudos
2. Introducción a la teoría de números algebraicos
3. Diccionario de Mazur-Kapranov-Reznikov entre 3-variedades y campos numericos
4. Número de enlace y símbolo de Legendre
5. Descomposición de nudos y descomposición de primos
6. La teoría de campos de clases: campos numéricos (Takagi, Artin, Tate)
7. La teoría de campos de clases: 3-variedades (Reznikov, Niibo, Mihara)
8. *Modulos de Alexander y nodulos de Iwasawa
9. *Espacios de moduli de grupos de nudos y de grupos primos

* = si el tiempo lo permite

***Referencia Principal*:**

Masanori Morishita, *Knots and Primes. An Introduction to Arithmetic Topology* Segunda Edición. Springer-Verlag 2024.

***Referencias Adicionales*:**

1. J.W.S. Cassels y A. Frohlich (editores), *Algebraic Number Theory.* Segunda edición, London Mathematical Society (2010)
2. B. Mazur, Primes, Knots and Po. https://bpb-us-e1.wpmucdn.com/sites.harvard.edu/dist/a/189/files/2023/01/Primes-Knots-and-Po.pdf
3. C. McMullen, Knots which behave like the prime numbers. *Compos. Math.* **149**, 1235–1244 (2013)

[1]La n más grande donde $H^n \neq 0$.

4. T. Mihara, Cohomological approach to class field theory in arithmetic topology. *Can. J. Math.* **71** (4), 891 – 935 (2019)
5. M. Morishita, On certain analogies between knots and primes. *J. Reine. Angew. Math.* **550**, 141 – 167 (2002)
6. J. Neukirch, *Algebraic Number Theory.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **322**, Springer-Verlag, (1999)
7. J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of Number Fields.* Segunda Edición, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **323**, Springer-Verlag, (2008)
8. H. Niibo y J. Ueki, Idèlic class field theory for 3-manifolds and very admissible links. *Trans. AMS* **371** (12), 8467 – 8488 (2019)
9. A. Reznikov, Three-manifold class field theory. *Sel. Math. New Ser.* **3**, 361–399 (1997)
10. D. Rolfson, *Knots and Links.* Publish or Perish (1976)
11. J.-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne.* Lecture Notes in Math **5**, Segunda edición (1989)
12. W. P. Thurston, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds.* Notas, Princeton University, (1977)