

Seminario: Estabilidad Estocástica y Convergencia de Procesos de Markov

Profesor: Jorge Ignacio González Cázares

Descripción del Curso

Este seminario de aproximadamente 32 sesiones (75 minutos cada una) explora las propiedades de convergencia de los procesos de Markov, con un enfoque en los fundamentos teóricos, la estabilidad y sus aplicaciones. La referencia principal es *Markov Chains and Stochastic Stability* de Meyn y Tweedie (2009), complementada con avances recientes de textos y artículos. El curso equilibra la teoría matemática rigurosa con aplicaciones prácticas, abarcando cadenas de Markov en tiempo discreto y continuo, métricas de convergencia y análisis de estabilidad.

Prerrequisitos

- Teoría de probabilidad (fundamentos en teoría de la medida)
- Álgebra lineal
- Análisis real básico
- Familiaridad con procesos estocásticos (útil, pero no obligatoria)

Objetivos de Aprendizaje

- Comprender la estructura y dinámica de los procesos de Markov
- Dominar conceptos de convergencia (e.g., variación total, acoplamiento, ergodicidad)
- Analizar la estabilidad y el comportamiento a largo plazo de cadenas de Markov
- Aplicar resultados teóricos a problemas en colas, finanzas y aprendizaje automático
- Interactuar críticamente con literatura reciente sobre convergencia

Programa del Curso

Parte 1: Fundamentos de Procesos de Markov (Sesiones 1–6)

- **Sesión 1:** Introducción a los procesos de Markov
 - Definiciones, propiedad de Markov, núcleos de transición
 - Ejemplos: paseos aleatorios, sistemas de colas
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 1
- **Sesión 2:** Cadenas de Markov en tiempo discreto

- Matrices de transición, espacios de estados
- Clasificación de estados (recurrentes, transitorios)
- Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 2
- **Sesión 3:** Cadenas de Markov en tiempo continuo
 - Procesos de salto, generadores y semigrupos
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 2; Norris, *Markov Chains*, Capítulo 2
- **Sesión 4:** Distribuciones estacionarias
 - Existencia y unicidad
 - Recurrencia positiva
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 10
- **Sesión 5:** Reversibilidad y reversión temporal
 - Balance detallado, equilibrio
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 4
- **Sesión 6:** Conceptos básicos de convergencia
 - Distancia de variación total, acoplamiento
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 14

Parte 2: Estabilidad y Ergodicidad (Sesiones 7–14)

- **Sesión 7:** Conceptos de estabilidad
 - Funciones de Lyapunov, condiciones de deriva
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 11
- **Sesión 8:** Ergodicidad geométrica
 - Condiciones para convergencia geométrica
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 15
- **Sesión 9:** Ergodicidad uniforme
 - Condiciones de Doeblin, minorización
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 16
- **Sesión 10:** Criterios de Foster-Lyapunov
 - Aplicaciones al análisis de estabilidad
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 11
- **Sesión 11:** Recurrencia de Harris
 - Tiempos de regeneración, técnicas de partición
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 9
- **Sesión 12:** Métodos de acoplamiento
 - Acoplamiento desde el pasado, cotas de convergencia
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 14; Levin et al., *Markov Chains and Mixing Times*, Capítulo 11
- **Sesión 13:** Ergodicidad V-uniforme
 - Normas ponderadas, estabilidad avanzada
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 16
- **Sesión 14:** Cadenas no irreducibles
 - Estados absorbentes, convergencia parcial
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 12

Parte 3: Métricas y Tasas de Convergencia (Sesiones 15–22)

- **Sesión 15:** Convergencia en variación total

- Cotas y tasas
- Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 14
- **Sesión 16:** Distancia de Wasserstein
 - Aplicaciones a procesos de Markov
 - Lectura: Villani, *Optimal Transport*, Capítulo 6
- **Sesión 17:** Métodos espectrales
 - Valores propios, brecha espectral
 - Lectura: Levin et al., Capítulo 12
- **Sesión 18:** Tiempos de mezcla
 - Definiciones, cotas y ejemplos
 - Lectura: Levin et al., Capítulo 4
- **Sesión 19:** Fenómeno de corte
 - Mezcla rápida, comportamiento de umbral
 - Lectura: Levin et al., Capítulo 18
- **Sesión 20:** Convergencia en tiempo continuo
 - Análisis basado en generadores
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 17
- **Sesión 21:** Cotas cuantitativas
 - Tasas de convergencia explícitas
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 15
- **Sesión 22:** Técnicas avanzadas de acoplamiento
 - Acoplamientos óptimos, acoplamiento desplazado
 - Lectura: Thorisson, *Coupling, Stationarity, and Regeneration*, Capítulo 3

Parte 4: Aplicaciones y Temas Avanzados (Sesiones 23–30)

- **Sesión 23:** Monte Carlo con Cadenas de Markov (MCMC)
 - Convergencia de algoritmos de muestreo
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 13; Robert & Casella, *Monte Carlo Statistical Methods*, Capítulo 7
- **Sesión 24:** Sistemas de colas
 - Estabilidad y convergencia en colas
 - Lectura: Meyn & Tweedie, Capítulo 18
- **Sesión 25:** Modelos financieros
 - Modelos de Markov en valoración de opciones
 - Lectura: Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II*, Capítulo 5
- **Sesión 26:** Aplicaciones en aprendizaje automático
 - Procesos de Markov en aprendizaje por refuerzo
 - Lectura: Sutton & Barto, *Reinforcement Learning*, Capítulo 3
- **Sesión 27:** MCMC con salto reversible
 - Convergencia en espacios transdimensionales
 - Lectura: Green (1995), “Reversible jump MCMC”
- **Sesión 28:** Extensiones no markovianas
 - Procesos semi-Markov, convergencia
 - Lectura: Barbu & Limnios, *Semi-Markov Chains*, Capítulo 2
- **Sesión 29:** Avances recientes
 - Hipocoercividad, desigualdades funcionales

- Lectura: Bakry et al., *Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators*, Capítulo 4
- **Sesión 30:** Problemas abiertos
 - Desafíos actuales en análisis de convergencia
 - Lectura: Artículos recientes (e.g., preprints en arXiv)

Parte 5: Revisión y Proyectos (Sesiones 31–32)

- **Sesión 31:** Revisión y síntesis
 - Conceptos clave, preguntas abiertas
 - Discusión de propuestas de proyectos
- **Sesión 32:** Presentaciones de proyectos
 - Charlas dirigidas por estudiantes sobre aplicaciones de convergencia
 - Retroalimentación y cierre

Literatura Recomendada

Referencia Principal

- Meyn, S. P., & Tweedie, R. L. (2009). *Markov Chains and Stochastic Stability* (2ª ed.). Cambridge University Press.
 - Texto fundamental y completo sobre teoría y convergencia de cadenas de Markov.

Libros Complementarios

- Levin, D. A., Peres, Y., & Wilmer, E. L. (2017). *Markov Chains and Mixing Times* (2ª ed.). American Mathematical Society.
 - Excelente para tiempos de mezcla y métodos de acoplamiento.
- Norris, J. R. (1998). *Markov Chains*. Cambridge University Press.
 - Introducción clara a cadenas en tiempo continuo.
- Villani, C. (2009). *Optimal Transport: Old and New*. Springer.
 - Cubre la distancia de Wasserstein y aplicaciones.
- Thorisson, H. (2000). *Coupling, Stationarity, and Regeneration*. Springer.
 - Tratamiento detallado de técnicas de acoplamiento.
- Robert, C. P., & Casella, G. (2004). *Monte Carlo Statistical Methods* (2ª ed.). Springer.
 - Aplicaciones prácticas de MCMC.
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II*. Springer.
 - Modelos de Markov en finanzas.
- Sutton, R. S., & Barto, A. G. (2018). *Reinforcement Learning: An Introduction* (2ª ed.). MIT Press.
 - Procesos de Markov en aprendizaje por refuerzo.
- Barbu, V., & Limnios, N. (2008). *Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models*. Springer.
 - Extensiones no markovianas.

- Bakry, D., Gentil, I., & Ledoux, M. (2014). *Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators*. Springer.
 - Técnicas avanzadas de convergencia.
- Eberle, A. (2015). Markov processes. Lecture notes.

Artículos Clave

- Green, P. J. (1995). "Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination." *Biometrika*, 82(4), 711–732.
- Preprints recientes en arXiv (2020–2025) sobre hipocoercividad, tasas de convergencia y desigualdades funcionales.
- Mijatovic, A., Bresar, M. Subexponential lower bounds for f-ergodic Markov processes. (2025). *Probability Theory and Related Fields*.
- Fort, G., Roberts, G.O.: Subgeometric ergodicity of strong Markov processes. *Ann. Appl. Probab.* 15(2), 1565–1589 (2005)
- Gareth O. Roberts, Richard L. Tweedie "Exponential convergence of Langevin distributions and their discrete approximations," *Bernoulli*, Bernoulli 2(4), 341-363, (1996)

Evaluación

- Tareas y exposiciones semanales (50%)
- Proyecto final (30%): Análisis original o aplicación de técnicas de convergencia
- Participación (20%): Compromiso en discusiones y presentaciones

Notas

- Las sesiones incluyen conferencias, resolución de problemas y discusiones de lecturas.
- Se anima a los estudiantes a explorar artículos recientes para los proyectos.
- Ajustar el ritmo según el nivel y los intereses de los estudiantes.