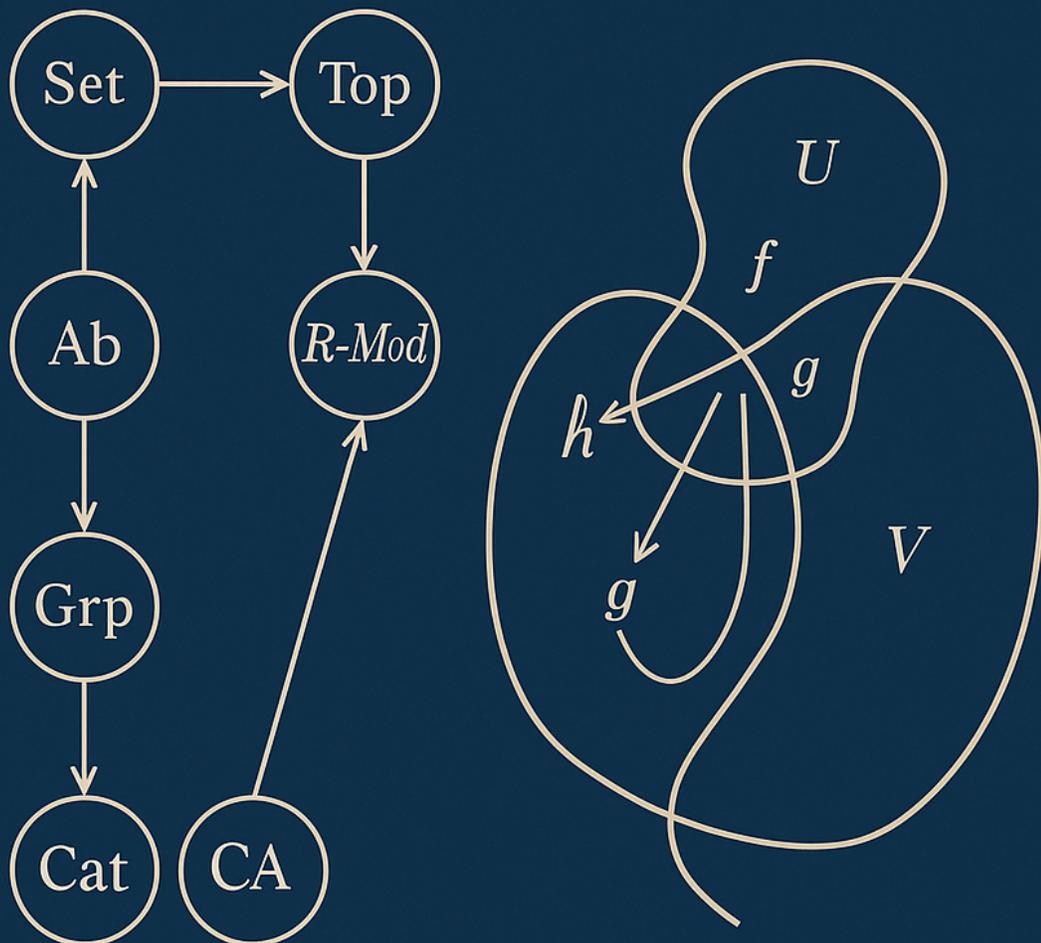


Matemáticas Condensadas I

Fundamentos Categóricos
y Topológicos

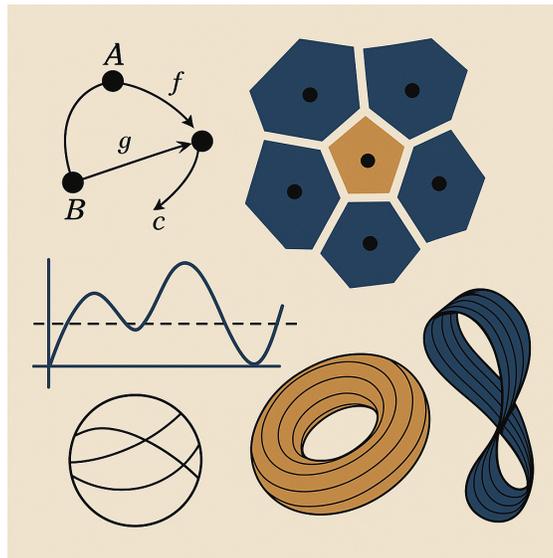


Dr. Jesús Rogelio Pérez Buendía

Matemáticas Condensadas I:

Fundamentos Categóricos y Topológicos

Dr. Jesús Rogelio Pérez Buendía
Investigador por México, CIMAT Mérida



Justificación

Este curso introduce los fundamentos categóricos y topológicos necesarios para tratar estructuras que aparecen de manera recurrente en diversas áreas de las matemáticas contemporáneas: categorías, límites y colímites, pre-gavillas, sitios de Grothendieck y gavillas. Estos conceptos proporcionan un marco estructural común para el estudio de propiedades locales, procesos de extensión global y relaciones entre distintos tipos de objetos matemáticos, sin recurrir necesariamente a representaciones puntuales o geométricas tradicionales.

La teoría de categorías permite describir de manera abstracta y uniforme objetos como conjuntos, espacios topológicos, grupos, módulos o funciones. Los sitios de Grothendieck generalizan la noción de espacio topológico y permiten definir coberturas en contextos más flexibles. Las gavillas, por su parte, formalizan el paso de lo local a lo global y permiten capturar estructuras que viven en contextos variables o jerárquicos. La construcción de categorías de pre-gavillas sobre un sitio es uno de los pasos centrales del curso.

Este curso es el primero de una serie de tres cursos sobre Matemáticas Condensadas, cuyo eje común es el estudio categórico de estructuras funcionales, topológicas y aritméticas desde una perspectiva moderna. Aunque este primer curso no presenta aún formalmente la teoría de conjuntos condensados, su propósito es establecer los fundamentos conceptuales para abordarla con rigor posteriormente.

Está diseñado para ser formativo por sí mismo y puede cursarse de manera independiente. Es relevante no sólo como preparación para los cursos posteriores, sino también para estudiantes que trabajen en áreas fundamentales del posgrado, como:

- Álgebra y álgebra homológica
- Geometría algebraica
- Topología y topología algebraica
- Análisis y análisis funcional
- Teoría de números
- Sistemas dinámicos

No se requieren conocimientos previos de geometría algebraica ni teoría de topos.

Temario (28 sesiones de 1.5 horas)

Bloque 1. Categorías y funtores (6 sesiones)

- Definición de categoría
- Morfismos, objetos iniciales y terminales
- Ejemplos: Set, Top, Ab, R-Mod, Grp, Cat
- Funtores covariantes y contravariantes
- Transformaciones naturales

Bloque 2. Límites, colímites y adjunciones (5 sesiones)

- Productos y coproductos
- Equalizadores y coequalizadores
- Definiciones generales
- Adjunciones: libre/olvido, inclusión/localización

Bloque 3. Pre-gavillas y lema de Yoneda (8 sesiones)

- Funtores contravariantes $C^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$
- Representabilidad
- Lema de Yoneda: formulación, pruebas, implicaciones
- Ejemplos y aplicaciones

Bloque 4. Sitios y categorías de pre-gavillas (6 sesiones)

- Definición de sitio y topología de Grothendieck
- Coberturas y refinamientos
- Ejemplos: sitio topológico usual, étale, profinitario
- Construcción de la categoría de pre-gavillas

Bloque 5. Gavillas y estructuras funcionales (3 sesiones)

- Condición de gluado
- Definición formal de gavilla
- Ejemplos: funciones continuas, gavillas constantes
- Relación con módulos, anillos y estructuras en geometría algebraica

Referencias

Primarias

- Awodey, S. *Category Theory*, Oxford University Press, 2010.
- Riehl, E. *Category Theory in Context*, Dover Publications, 2016.
- Mac Lane, S. *Categories for the Working Mathematician*, 2nd ed., Springer, 1998.
- Kashiwara, M., Schapira, P. *Categories and Sheaves*, Springer, 2006.

Complementarias

- Mac Lane, S., Moerdijk, I. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer, 1992.

- Vakil, R. *The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry*, versión preliminar disponible en línea.
- Grothendieck, A. *Éléments de Géométrie Algébrique (EGA)*, Publ. Math. IHÉS.
- Grothendieck, A. *SGA 1: Revêtements étales et groupe fondamental*, Springer Lecture Notes in Mathematics, 224.
- Leinster, T. *Basic Category Theory*, Cambridge University Press, 2014.
- Johnstone, P. T. *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*, Vol. 1, Oxford Logic Guides, 2002.

Lecturas futuras sugeridas (Condensed Mathematics)

- Clausen, D., Scholze, P. *Condensed Mathematics*, Book draft, disponible en www.math.uni-bonn.de/people/scholze.
- Clausen, D., Scholze, P. “Condensed Mathematics I: Foundations”, arXiv:2007.01885 [math.CT], 2020.
- Clausen, D., Scholze, P. “Condensed Mathematics II: Solid Abelian Groups”, arXiv:2007.01889 [math.CT], 2020.
- Clausen, D., Scholze, P. “Condensed Mathematics III: Solid Modules”, arXiv:2106.09645 [math.CT], 2021.
- Le Stum, B. *Condensed Mathematics for the Working Mathematician*, SMF, 2023.

Este curso como parte de una serie

Este curso es el primero de una **serie de tres cursos** diseñados para introducir de manera progresiva el marco conceptual de las *Matemáticas Condensadas*, tal como ha sido desarrollado recientemente por Clausen y Scholze. La serie está orientada a construir una comprensión rigurosa y estructurada de los fundamentos categóricos, topológicos y funcionales que subyacen a formulaciones contemporáneas en análisis, geometría y teoría aritmética.

Los cursos siguientes en esta serie son:

Matemáticas Condensadas II: Sitios, Gavillas y Condensación

Estudio detallado de los sitios de Grothendieck, categorías de gavillas, noción de topos como categoría de haces, y construcción del sitio profinitario. Introducción formal a los conjuntos condensados como objetos funcionales sobre dicho sitio. Este curso se apoya en los conceptos desarrollados en el curso I.

Matemáticas Condensadas III: Álgebra y Geometría Condensada

Lectura estructurada del texto *Condensed Mathematics* de Clausen y Scholze. Estudio de anillos y módulos condensados, teoría de Ext y Tor en este contexto, y aplicaciones a geometría p-ádica, espacios perfectoidales, teoría de moduli y cohomología funcional. Este curso presupone dominio del material cubierto en los cursos I y II.

Cada curso está concebido como una continuación natural del anterior. Aunque el curso I puede tomarse de forma autónoma, los cursos II y III **requieren comprensión previa del material previo**. La serie completa está dirigida a estudiantes interesados en adquirir herramientas estructurales modernas con aplicaciones en geometría algebraica, análisis funcional, lógica, dinámica y teoría de números.

Datos de contacto del profesor

Nombre: Dr. Jesús Rogelio Pérez Buendía

Afiliación: Investigador por México – CONAHCyT

Institución: Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), Unidad Mérida

Oficina: CIMAT Mérida, Oficina 22, Extensión 1314

Correo electrónico: rogelio.perez@cimat.mx

Sitio web académico: <https://www.cimat.mx>

Teléfono institucional: +52 999 941 2900 ext. 1314