



Métodos Variacionales y EDPs no lineales

Profesor: Dr. Alberto Saldaña

Correo: alberto.saldana@im.unam.mx

Telegram: AlbertoSaldana

Objetivo:

- Proporcionar al estudiante una formación sólida y rigurosa en el análisis de ecuaciones elípticas no lineales, enfocándose especialmente en técnicas variacionales y teoría de espacios de Sobolev. A lo largo del curso se estudian problemas semi-lineales y con exponente crítico, tanto en dominios acotados como no acotados, explorando la existencia, multiplicidad y regularidad de soluciones mediante herramientas modernas del análisis funcional y del cálculo de variaciones. Se busca que el alumno adquiera no solo conocimientos teóricos profundos, sino también habilidades técnicas para abordar problemas actuales en el análisis no lineal.

Temario:

1. Preliminares

- 1.1 Espacios de Sobolev
 - 1.1.1 Integración por partes
 - 1.1.2 Los espacios de Lebesgue
 - 1.1.3 Espacios de Hilbert
 - 1.1.4 Espacios de Sobolev
 - 1.1.5 Encajes de Sobolev
- 1.2 Diferenciabilidad en espacios de Banach
 - 1.2.1 Funciones diferenciables
 - 1.2.2 Variedades de Hilbert
- 1.3 Convergencia débil

2. Un problema elíptico semilineal

- 2.1 Formulación variacional del problema
 - 2.1.1 La gráfica del funcional de energía
 - 2.1.2 La variedad de Nehari
- 2.2 Una solución de energía mínima
- 2.3 Obtención de la solución clásica
- 2.4 Propiedades del término no lineal

3. Multiplicidad de soluciones

- 3.1 Motivación
- 3.2 El flujo gradiente negativo
 - 3.2.1 El problema de Cauchy
 - 3.2.2 El flujo gradiente negativo sobre una variedad
 - 3.2.3 El flujo gradiente negativo de una función par
- 3.3 El lema de deformación cuantitativo
- 3.4 La condición de Palais-Smale
- 3.5 El género de Krasnoselskii
- 3.6 Una cota para el número de puntos críticos
- 3.7 Infinidad de soluciones
- 3.8 El principio variacional de Ekeland

4. El problema en dominios no acotados

- 4.1 El problema variacional
- 4.2 Grupos de isometrías
- 4.3 Acción del grupo en el espacio de Sobolev
- 4.4 El principio de criticalidad simétrica
- 4.5 Invariancia y compacidad
- 4.6 Infinidad de soluciones G -invariantes
- 4.7 Infinidad de soluciones equivariantes
- 4.8 El estado fundamental
- 4.9 Signo de las soluciones de energía pequeña
- 4.10 Simetría del estado fundamental
- 4.11 Ondas estacionarias para la ecuación no lineal de Schrödinger

5. Problemas elípticos con exponente crítico

- 5.1 Un espacio de Sobolev adecuado
- 5.2 Invariancia bajo dilataciones
- 5.3 No existencia de mínimos
- 5.4 La identidad de Pohozaev
- 5.5 Comportamiento de las sucesiones minimizantes
- 5.6 La burbuja estándar
- 5.7 El problema ligeramente subcrítico
- 5.8 El problema de Brezis-Nirenberg

- 5..9 El efecto de las simetrías
- 5..10 El teorema de representación de Struwe
- 5..11 El teorema de Coron

Evaluación:

Se evaluará con ejercicios y con una exposición basada en los temas del curso.

Bibliografía:

1. Bartsch, Thomas: Topological methods for variational problems with symmetries. Lecture Notes in Mathematics, 1560. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
2. Brezis, Haim: Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, 2011.
3. Clapp, Mónica: Análisis Matemático. Segunda edición. Colección Papirhos, Serie Textos, Núm. 2, Universidad Nacional Autónoma de México, 2017.
4. Evans, Lawrence C.: Partial differential equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
5. Gilbarg, David; Trudinger, Neil S.: Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
6. Rabinowitz, Paul H.: Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
7. Struwe, Michael: Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Second edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 34. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
8. Willem, Michel: Minimax theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.