

El Teorema del Índice de Atiyah–Singer

Semestre 2026–I

GREGOR WEINGART

1 Operadores Diferenciales Elípticos

1.1 CONCEPTOS DE GEOMETRÍA RIEMANNIANA:

métricas Riemannianas, haces vectoriales, conexiones, operador de Laplace–Beltrami, derivada exterior, estrella de Hodge, divergencia, operador de Hodge–Laplace.

1.2 OPERADORES DIFERENCIALES:

definición, símbolo principal, clasificación por jets, ejemplos, operador formalmente adjunto, elipticidad, caracterización completa de los operadores de tipo Laplace.

1.3 ÁLGEBRA DE CLIFFORD Y ESPINORES:

propiedades generales, existencia de espinores, calibraciones, conjugación de carga, teorema CPT, clasificación de las álgebras de Clifford, estructuras $\text{espín}^{\mathbb{C}}$ y estructuras espín en variedades Riemannianas, operadores de tipo Dirac.

2 Regularidad Elíptica

2.1 ESPACIOS DE SOBOLEV:

espacios de Sobolev integrales, transformada de Fourier, definición general en $\mathbb{R}^m$, formulación para variedades Riemannianas, teorema de encaje de Sobolev.

2.2 ESTIMADO DE SOBOLEV:

estimado de Sobolev para un operador diferencial elíptico, suavidad de soluciones, dimensión finita de los espacios propios, teoría de Hodge, teorema de Peter–Weyl.

3 Teorema Local y Global del Índice

3.1 ECUACIÓN DE CALOR:

ecuación de calor para un operador tipo Laplace, núcleos de calor, existencia general del núcleo de calor.

3.2 CONSTRUCCIÓN DE MINAKSHISUNDARAM–PLEIJEL:

ansatz para el núcleo, calculación inductiva de coeficientes, construcción de la *parametrix*, expansión asintótica.

3.3 CANCELACIONES FANTÁSTICAS Y REGULARIDAD DE LA TRAZA:

cancelaciones fantásticas, orden de aniquilación de la traza, teorema de Chern–Gauß–Bonnet, operadores de Dirac torcidos, fórmula de Mehler, demostración del teorema local del índice, comparación con la transformación de Getzler.

3.4 TEOREMA GLOBAL DEL ÍNDICE:

índice de Fredholm, invarianza homotópica, introducción a la teoría K , teorema global del índice de Atiyah–Singer.

Referencias

- [BGV] BERLINE, N. , GETZLER, E. & VERGNE, M. : *Heat Kernels and Dirac Operators*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 298, Springer (1992).
- [FH] FULTON, W. & HARRIS, J. : *Representation Theory: A First Course*, Readings in Mathematics 131, Springer (1990).
- [LM] LAWSON, H. B. & MICHELSON, M. L. : *Spin Geometry*, Princeton Mathematical Series 38, Princeton University Press (1989).