

Examen para ingreso a la maestría del Posgrado en Ciencias Matemáticas de la UNAM

- El tiempo máximo para realizar el examen es de 120 minutos.
- Numere las hojas y escriba las respuestas en hojas separadas.
- Responda las preguntas justificando su respuesta.
- Ponga sus apellidos en la primera hoja en el borde superior.
- (Via remota) Escanee las hojas de respuestas en un solo documento tipo pdf y
- (Via remota) Al archivo generado nómbrelo con primer y segundo apellidos (ejemplo diazlopez.pdf)

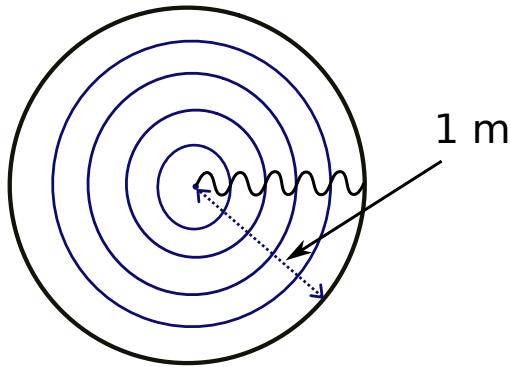
1. Encuentre los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

2. Al arrojar una piedra en un estanque se forman ondas circulares concéntricas que se desplazan a una velocidad constante de 25cm/s. ¿Cuál es la razón de cambio del área comprendida por la onda circular cuando el radio de ésta ha alcanzado la longitud de 1 m? (vea figura)



3. Sea $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$ un punto en el plano y sea L la gráfica de $f(x) = mx + b$. Encuentre x tal que la distancia de \bar{x}_0 a $(x, f(x))$ sea mínima.

4. Encuentre las derivadas respecto a la variable x de las siguientes funciones $f(x)$:

$$a) \int_{x^2}^a \frac{dt}{1 + \cos^2 t}, \quad b) \int_a^{\cos x} \frac{dt}{t + \sin^2 t}, \quad c) \int_a^x 1 + \tan t dt.$$

5. Pruebe que si la sucesión $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es monótona y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} k a_k = 0$.