

Posgrado en Ciencias Matemáticas

Examen de Admisión - Cálculo Diferencial e Integral- Semestre 2023-2

- El tiempo máximo para realizar el examen es de 120 minutos.
- Numere las hojas y escriba las respuestas en hojas separadas.
- Responda las preguntas justificando su respuesta.
- Poner sus apellidos en la primera hoja en el borde superior.

Ejercicios:

1. (15 puntos) Calcule los siguientes límites, justifique la respuesta.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{n^2+1}$.

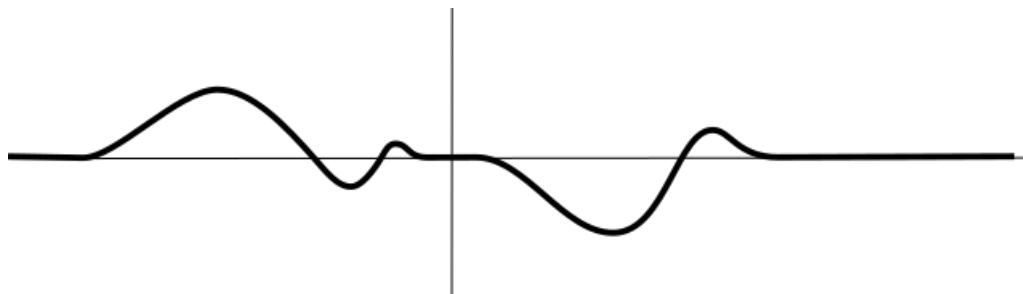
(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^n$.

2. (10 puntos) Diga si converge o diverge la siguiente serie:

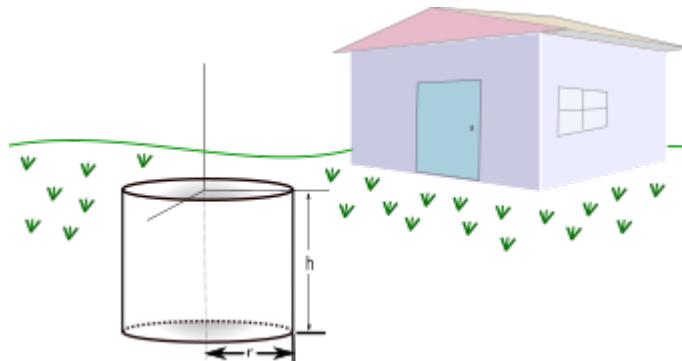
(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$.

3. (10 puntos) Suponga que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es infinitamente diferenciable y que la gráfica de su derivada f' es como muestra la figura:



Dibuje (aprox) la gráfica de f y determine, para la función f , los puntos Máximos, puntos mínimos), puntos de inflexión, intervalos con concavidad hacia arriba y hacia abajo.

4. (25 puntos) Determinar las dimensiones de una cisterna de forma cilíndrica con tapa para recoger agua de lluvia y que tenga 8000 litros de capacidad y de tal forma que superficie es mínima con el fin de ahorrar en materiales de construcción:



5. (20 punto) Un cohete espacial lleva una carga de combustible de masa m gramos. Como medida de conservación, el comandante decide quemar el combustible a razón de $R(t) = mke^{-kt} \frac{g}{s}$ (gramos por segundo), donde k es una constante positiva.

(a) ¿Qué representa la integral $\int_0^u R(t) dt$ para $u > 0$?

(b) Si consideramos que el combustible se acaba al quedar menos de un gramo, ¿cuánto tarda en acabarse el combustible?

6. (20 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cóncava y sea $y \in \mathbb{R}$. Demuestra que la función $h : \mathbb{R} \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) := \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

es monótona no creciente.

(Ayuda: f es cóncava si y sólo si $f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, 1]$; para demostrar la afirmación, considera primero $x_1 < x_2 < y$ y demuestra que $h(x_2) \leq h(x_1)$).