

# Posgrado en Ciencias Matemáticas

## Examen de Admisión - Cálculo Diferencial e Integral- Semestre 2023-2

- El tiempo máximo para realizar el examen es de 120 minutos.
- Numere las hojas y escriba las respuestas en hojas separadas.
- Responda las preguntas justificando su respuesta.
- Poner sus apellidos en la primera hoja en el borde superior.

### Ejercicios:

1. (15 puntos) Calcule los siguientes límites, justifique la respuesta.

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{n^2+1}$ .

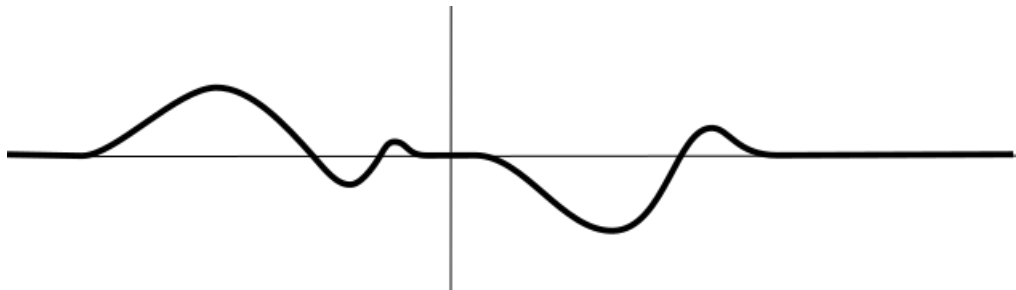
(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$ .

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-1}{3n+1} \right)^n$ .

2. (10 puntos) Diga si converge o diverge las siguiente serie:

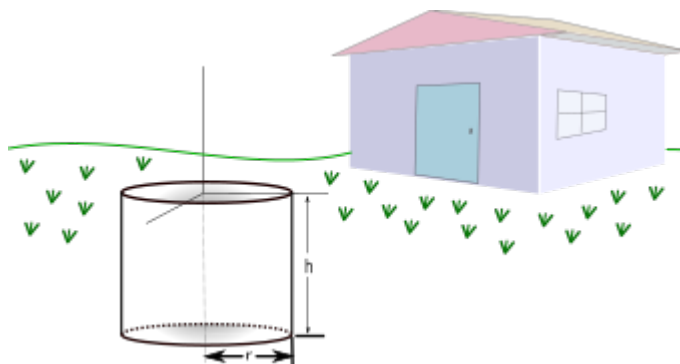
(a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$ .

3. (10 puntos) Suponga que la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es infinitamente diferenciable y que la gráfica de su derivada  $f'$  es como muestra la figura:



Dibuje (aprox) la grafica de  $f$  y determine, para la función  $f$ , los puntos Máximos, puntos mínimos), puntos de inflexión, intervalos con concavidad hacia arriba y hacia abajo.

4. (25 puntos) Determinar las dimensiones de una cisterna de forma cilíndrica con tapa para recoger agua de lluvia y que tenga 8000 litros de capacidad y de tal forma que superficie es mínima con el fin de ahorrar en materiales de construcción:



5. (20 punto) Un cohete espacial lleva una carga de combustible de masa  $m$  gramos. Como medida de conservación, el comandante decide quemar el combustible a razón de  $R(t) = mke^{-kt} \frac{g}{s}$  (gramos por segundo), donde  $k$  es una constante positiva.
- (a) ¿Qué representa la integral  $\int_0^u R(t) dt$  para  $u > 0$ ?
- (b) Si consideramos que el combustible se acaba al quedar menos de un gramo, ¿cuánto tarda en acabarse el combustible?
6. (20 puntos) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función cóncava y sea  $y \in \mathbb{R}$ . Demuestra que la función  $h : \mathbb{R} \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$h(x) := \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

es monótona no creciente.

(Ayuda:  $f$  es cóncava si y sólo si  $f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b)$  para todo  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $t \in [0, 1]$ ; para demostrar la afirmación, considera primero  $x_1 < x_2 < y$  y demuestra que  $h(x_2) \leq h(x_1)$ ).