Examen General de Conocimientos: Álgebra Moderna.
Semestre 2025-II.
4 de agosto de 2025.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. Escoge y resuelve solamente 3 ejercicios de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 3 ejercicios en cada sección, se calificarán los primeros 3. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Sea G un grupo abeliano finito con exactamente un elemento f de orden 2. Demuestra que $\prod_{g\in G} g = f$.

2. Sea G un grupo que actúa en X. Decimos que un subconjunto $Y \subseteq X$ es invariante si $g \cdot y \in Y$ para toda $g \in G$ y toda $y \in Y$. Demuestra que un subconjunto $Y \subseteq X$ es invariante si y solo si Y es igual a la unión de algunas órbitas de la acción.

3. Demuestra que si K es un subgrupo normal de un grupo G tal que el orden de K y el índice de K en G son primos relativos, entonces K es el único subgrupo de G de orden $|K|$.

4. Demuestra que no hay grupos simples de orden 56.

5. Sean G un grupo y N un subgrupo normal de G. Demuestra que si N y ${}^{G}\!/_{N}$ son solubles, entonces G es soluble.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Sea R un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. Demuestra que si $a \in R$ es un elemento nilpotente (es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$) de R, entonces $1 - ab$ es una unidad para todo $b \in R$.

2. Sea R un *D.F.U.* Demuestra que R es un *D.I.P.* si todo ideal primo (respectivamente máximo) es principal.

3. Demuestra que el dominio entero $\mathbb{Z}\left[i\sqrt{3}\right]$ no es un *D.F.U.*

4. Sea $p(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomio irreducible sobre $\mathbb{Q}$ y cuyas raíces son:
$$\sqrt[3]{2}\left(\tfrac{1}{2}i\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\right), \quad \sqrt[3]{2}, \quad -\sqrt[3]{2}\left(\tfrac{1}{2}i\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\right) \ .$$

   (a) Encuentra su campo de descomposición L sobre $\mathbb{Q}$.
   (b) Da los campos intermedios de la extensión L sobre $\mathbb{Q}$.

5. Sea ${}^{F}\!/_{K}$ una extensión de Galois de grado n y sea E un campo intermedio. Supón que $[E, K]$ es el menor primo que divide a n. Demuestra que ${}^{E}\!/_{K}$ es de Galois.