Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Examen general: Análisis numérico
Verano 2025

Instrucciones. Tiene 4 horas a partir de la hora de inicio de su lectura para entregar el examen. Habrá un periodo corto de aproximadamente 10 minutos de tiempo para lectura de preguntas antes de comenzar el trabajo para el examen. Entregue una sección de respuestas y adjunte en una sección separada su trabajo en borrador. Se le recomienda que comience a redactar la sección de respuestas al menos 15 minutos ***antes*** de la hora límite. Tome en cuenta que tiene menos de cuatro horas para trabajar en su examen. En la esquina superior derecha de cada página, escriba su nombre completo. Los examenes que no cumplan con las instrucciones, o que no sean legibles (e.g. respuestas con tachones o borrones) no serán calificados.

Problema	Max	Puntos
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	20	
7	10	
8	20	
Total:	100	

Preguntas

1. (10 puntos) Sea la factroización QR de una matriz no singular $A = \hat{Q}\hat{R}$. Definamos la matriz diagonal $D = \{d_1, d_2, \dots d_n\}$, tal que $d_{ii} = 1$ si $\hat{r}_{ii} > 0$ y $d_{ii} = -1$ si $\hat{r}_{ii} < 0$. Definamos ahora $Q = \hat{Q}D^{-1}$ y $R = D\hat{R}$. Entonces, muestre que $A = QR$, ¿Cuál es la importancia de este resultado?

2. (10 puntos) Encuentre la factorización QR de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Use los dos métodos: de Householder y Givens. Establezca una relación entre estas dos factorizaciones usando los resultados del problema anterior.

3. (10 puntos) Encuentre las matrices U, Σ y V de la descomposición SVD de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

   Explique los detalles de estos cálculos.

4. (10 puntos) Si una matriz $A = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$ tiene rango 1, cuál es el valor singular σ_1 y sus correspondientes vectores singulares izquierdos y derechos $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$. Verificar que el eigenvalor $|\lambda_1| \leqslant \sigma_1$.

5. (10 puntos) Encuentre un polinomio $p \in \mathcal{P}_4$ que interpola los datos $f(1), f(-1), f''(1), f''(-1)$. Nótese que no hay primeras derivadas y mostrar que el problema tiene solución única. *Sugerencia:* Usar una base de potencias para obtener un sistema de ecuaciones de la forma $Mc = f$, donde $f = (f_1, f_{-1}, f''_1, f''_{-1})$ y

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

6. *La regla de Simpson* con correcciones en los extremos es una fórmula de cuadratura de la forma:

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx h\left(\alpha f(-h) + \beta f(0) + \alpha f(h)\right) + h^2\gamma\left(f'(-h) - f'(h)\right), \tag{1}$$

   que es exacta para polinomios de grado cinco.

   (a) (10 puntos) Determine los pesos α, β, γ usando las funciones de prueba $f(x) = 1, x^2, x^4$. Usar $f(x) = x^6$ para determinar el término de error.

   (b) (10 puntos) Muestre que la correspondiente fórmula compuesta para el intervalo $[a, b]$ con $b - a = 2nh$, solo se necesitan las derivadas en los extremos: $f'(a)$ y $f'(b)$.

7. (10 puntos) Determinar p, q y r tal que el orden del método iterativo

$$x_{n+1} = px_n + q * c/x_n^2 + r * c^2/x_n^5$$

para calcular $\sqrt[3]{c}$ sea el mayor posible. Para esta elección de p, q y r dar la relación entre el error en x_{n+1} y x_n

8. La ecuacióon $x^3 - x$ tiene tres raíces: $\{-1, 0, 1\}$. Queremos estudiar el comportamiento del método de Newton para esta ecuación.

   (a) (10 puntos) ¿Qué pasa si $x_0 = 1/\sqrt{3}$? Si la iteración de Newton se define como sigue:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

   mustre que x_n converge para cualquier $x_0 > 1/\sqrt{3}$. ¿Cuál es el resultado análogo para la convergencia a -1?

   (b) (10 puntos) ¿Qué pasa si $x_0 = 1/\sqrt{5}$, mustre que x_n converge a 0 para cualquier $x_0 \in (-1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. Primero mostrar que si $x_0 \in (0, 1/\sqrt{5})$, luego que si $x_1 \in (-x_0, 0)$, qué se puede decir de x_2?