POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Funcional

Agosto 2025
Semestre 2025-2

Puntos: 36 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja, su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja y deberá numerar cada hoja.

Nota: en lo que sigue, dado un espacio vectorial normado X, $B_r^X(x_0)$ denota la bola abierta en X con radio $r > 0$ y centrada en x_0; X^* denota el dual de X.

1. (6 puntos) Sea X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$. Sea $K \subset X$ un subconjunto *convexo* de X con la propiedad de que, para todo $u \in X$, $u \neq 0$, existe un número real positivo $M(u) > 0$ tal que

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \,:\, \lambda u \in K\} = (-M(u), M(u)).$$

Sea $u_0 \in X \backslash K = K^c$. Prueba que existe un funcional lineal acotada $\ell : X \to \mathbb{R}$ tal que $\ell(u_0) \geq 1$ y $\ell(u) < 1$ para todo $u \in K$.

2. (6 puntos) Sea X un espacio de Banach.

   a) Demuestra que una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge débilmente a $u \in X$ si y sólo si $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado en $\mathbb{R}$ y $\ell(u_n) \to \ell(u)$ para todo $\ell \in S$, donde $S \subset X^*$ es un subconjunto del dual tal que $\operatorname{span}(S)$ es denso en X^*

   b) Demuestra que una sucesión $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ converge débilmente-$*$ a un elemento $\ell \in X^*$ si y sólo si $(\|\ell_n\|_*)_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$ y $\ell_n(u) \to \ell(u)$ para todo $u \in D$, donde $D \subset X$ es un subconjunto tal que $\operatorname{span}(D)$ es denso en X.

3. (6 puntos) Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado. Supongamos que existe un $r > 0$ tal que:

$$B_1^Y(0) \subseteq T(B_r^X(0)).$$

Demuestra que la función T es abierta.

4. (6 puntos) Sea $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ definido por

$$T((x_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \left(\frac{x_j}{j}\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

Demuestra que T es operador lineal acotado y compacto.

5. (6 puntos) Sea H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, con producto interno sesquilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (lineal en la primera entrada, conjugada-lineal en la segunda). Definimos la función:

$$\Phi : H \to H^*, \quad \Phi(a) = \varphi_a$$

donde $\varphi_a(x) = \langle x, a\rangle$.

Demuestra que:

a) Φ es conjugada-lineal, es decir: $\Phi(\alpha a + \beta b) = \overline{\alpha}\Phi(a) + \overline{\beta}\Phi(b)$, para todos $a, b \in H$ y todos escalares α, β.

b) Φ es inyectiva.

c) Φ es suprayectiva.

d) Φ es isométrica, es decir, $\|\Phi(a)\| = \|a\|$, para toda $a \in H$.

Sugerencia: Teorema de representación de Riesz.

6. (6 puntos) **Teorema de Hellinger-Toeplitz:**

Sean H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $T : H \to H$ un operador tal que $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$ para cualesquiera $u, v \in H$. Prueba que T es *acotado.*

(Nota: como corolario de este teorema tenemos que un operador autoadjunto, *no acotado,* no puede estar definido en todo H.)