POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Real

Agosto 2025
Semestre 2025-2

Puntos: 36 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja, su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja y deberá enumerar todas la hojas.

---

1. (6 puntos) Una función, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, es *Lipschitz* si existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$, para todos $x, y \in [a, b]$.

   a) Da un ejemplo de una función Lipschitz que no sea absolutamente continua.

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua. Prueba que f es Lipschitz si y sólo si $|f'|$ está acotada.

   c) Prueba que la función $x(t) = \sqrt{t}$ es absolutamente continua en $[0, 1]$, pero no es Lipschitz.

2. (6 punto) Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un espacio vectorial X son *equivalentes* si existen escalares c, d tales que $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$, $\|x\|_2 \leq d\|x\|_1$, para todo $x \in X$.El espacio $C[0, 1]$ de funciones continuas de $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$ admite, entre otras, las siguientes dos normas:

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{máx}_{t\in[0,1]}\{|f(t)|\}, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

   a) ¿Son equivalentes éstas dos normas?

   b) Prueba que la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $f_n(t) = (\text{mín}\{2t, 1\})^n$, es Cauchy relativa a $\|\cdot\|_1$ pero no converge en esa norma a un elemento de $C[0, 1]$.

3. (6 puntos) Considera los espacios de sucesiones de números reales:

$$\begin{aligned} c &= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n \text{ existe}\}, \\ c_0 &= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}, \end{aligned}$$

   ambos equipados con la norma $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|\}$, de ℓ_∞.

a) Prueba que, si $1 \leq p < q < \infty$, entonces $\ell_p \subset \ell_q$ y la inyección (el mapeo identidad $\Lambda x = x$ de ℓ_p a ℓ_q) es continua.

b) Claramente ℓ_1 es un subespacio de c_0, y c_0 es un subespacio de ℓ_∞. ¿En qué caso podemos decir que es un subespacio cerrado?

4. (6 puntos) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $L_p[0,1]$ $(1 < p < \infty)$ que converge casi seguramente a $f \in L_p[0,1]$ y supón que existe una constante $M > 0$ tal que $\|f_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que, para toda $g \in L_q[0,1]$ (q el conjugado de p), se tiene que $\int fg = \lim_{n\to\infty} \int f_n g$.

   ¿Es cierto éste resultado para $p = 1$?

5. (6 puntos) Sean $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ dos espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$. Define

$$L(V,W) = \{A : V \to W \mid A \text{ es lineal y continua}\}.$$

   Para $A \in L(V,W)$, define

$$\|A\| = \sup_{x\in V,\ \|x\|_V \leq 1} \{\|A(x)\|_W\}$$

   a) Prueba que $\|\cdot\|$ es una norma en $L(V,W)$.

   b) Prueba que $(L(V,W), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

6. (6 puntos) Define

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \text{ o } y < 0 \\ \text{mín}\{x,y\} & \text{si} \quad (0 \leq x < 1 \text{ y } y \geq 0) \text{ o } (x \geq 0 \text{ y } 0 \leq y < 1) \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \text{ y } y \geq 1. \end{cases}$$

   Dados $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ denotamos $R = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Definimos el volumen de R con respecto a F como:

$$V_F(R) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1).$$

   Prueba que $V_F(R) \geq 0$ para todo rectángulo R.

   Nota: cuando una función satisface lo anterior decimos que es 2-creciente.