Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre 2025-2

Instrucciones:

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.
- La calificación mínima aprobatoria es 60 puntos.

1. (20 puntos) Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, considera el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x,y)x, \\ y' = f(x,y)y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 > 0, \\ y(0) = y_0 > 0. \end{cases}$$

(a) Encuentra la solución explícita del problema de Cauchy cuando $f(x,y) = x - y$ y determina su intervalo de existencia maximal. ¿Cuales son los datos iniciales (x_0, y_0) tal que la solución es global (definida para cualquier $t \in \mathbb{R}$)?

(b) Para una función arbitraria $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, demostrar que si $x_0, y_0 > 0$, la solución satisface $x(t), y(t) > 0$ para todo t en su intervalo de existencia maximal.

2. (30 puntos) Considera los siguientes problemas de Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2 - \dfrac{1}{(1+y^2)^2}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{(1-x^2)y}{(1+x^2)(1+e^y)}, \\ y(0) = y_0 > 0. \end{cases}$$

Para cada problema:

(a) Demostrar que existe una única solución $y = y(t)$ y que la solución es global.

(b) Estudiar la monotonicidad de la solución y.

(c) Calcular los límites de la solución $y = y(t)$ cuando $t \to -\infty$ y $t \to +\infty$.

(d) Haz un dibujo de la solución encontrada.

3. (10 puntos) Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular e^{At}.

(b) Encontrar la solución del problema de Cauchy

$$Y' = AY, \qquad Y(0) = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3,$$

donde $Y = Y(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

(c) Determinar el conjunto S de los datos iniciales $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ para los cuales la solución Y satisface

$$\lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0),$$

y el conjunto U de los datos iniciales $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ para los cuales la solución Y satisface

$$\lim_{t \to -\infty} (x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0).$$

¿Es cierto que $S \cup U = \mathbb{R}^3$?

4. (10 puntos) Considera la solución del sistema no-lineal en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = y(x+1), \\ y' = xy^2, \end{cases}$$

con condición inicial $(x(0), y(0)) = (0, 1)$. Encuentra explícitamente y haz un dibujo de la función $y = \phi(x)$ que describe la trayectoria en el retrato de fase. Estudia la monotonicidad de $x(t), y(t)$ en el intervalo de existencia maximal.

5. (10 puntos) Considera el sistema lineal periódico $x' = A(t)x$, donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t \\ -1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular los valores propios de la matriz $A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b) Determinar si la solución cero es estable, inestable o asintóticamente estable.

6. (20 puntos) Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $\kappa > 0$ una costante estrictamente positiva. Considera el sistema no-lineal en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = -x + \kappa f(y)x, \\ y' = -y + f(y)x. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Si $f(y) := 1 - e^{-y}$, encuentra los puntos de equilibrio del sistema (1) para todo $\kappa > 0$, y determina si son puntos de sillas, nodos (o focos) estables o inestables.

(b) Discute la existencia y estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (1) para una función arbitraria $f \in C^2(\mathbb{R})$ y para todo $\kappa > 0$. En particular, encuentra condiciones adecuadas sobre $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $\kappa > 0$ para que (1) tenga puntos de equilibrio asintóticamente estables.