Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Parciales
Semestre 2025-2

Instrucciones

- Duración: 4 horas;
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja;
- La calificación mínima aprobatoria es de 60 puntos.

1. (25 puntos) Hallar la única solución entrópica del siguiente problema con la ecuación de Burger:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & 0 < x < 1, \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

2. (25 puntos) Una onda esférica es una solución del problema de onda tridimensional de la forma $u(r,t)$ donde r es la distancia al origen en coordenadas esféricas. En este contexto tenemos que resolver la ecuación de onda esférica:

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right), \quad r > 0,\ t > 0,$$

donde el término de la derecha de esta ecuación es el laplaciano en coordenadas esféricas. Resolver la ecuación anterior bajo las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$\begin{cases} u_r(0,t) = 0 & t > 0, \\ u(r,0) = f(r),\ u_t(r,0) = g(r) & r > 0, \end{cases}$$

donde $f \in C^2[0,\infty)$ y $g \in C^1[0,\infty)$, con $f'(0) = g'(0) = 0$.

3. (25 puntos) Resolver el problema de calor no homogéneo completo: con fuente externa y temperatura variable en los extremos:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + h(x,t) & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = g_0(t), u(l,t) = g_l(t) & t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < l, \end{cases}$$

donde

i) $f \in C[0,l]$, $g_{0,l} \in C^1[0,\infty)$ con derivadas acotadas y $h \in C([0,l] \times (0,\infty))$ acotada;
ii) $f(0) = g_0(0)$, $f(l) = g_l(0)$ y $h(0,t) = g_0'(t)$, $h(l,t) = g_l'(t)$ para todo $t > 0$.

4. (25 puntos) Consideremos el cuadrado $R = (0,\pi)^2$. Probar que si $u \in C^2(R) \cap C^1(\bar{R})$ es armónica y $u(x,0) = u_y(x,0) = 0$ para todo $0 < x < \pi$, entonces $u \equiv 0$. Justificar con rigor los argumentos. Este ejercicio muestra que si usamos a la par condiciones de Dirichlet cero y de Neumann cero en en una porción abierta de la frontera del dominio se obtiene una función armónica trivial.