Fundamentos de Combinatoria

Examen General 2025-2

Duración: 4 horas. Cada uno de los ocho problema vale 2 puntos y para pasar se necesitan 8 puntos.

1. Calcula el número de sucesiones de longitud n con entradas tomadas del conjunto $\{A, B, C, D\}$ que tienen un número par de A y un número par de B.

2. Sea $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ el número de permutaciones de n letras que son composición de k ciclos ajenos. Prueba que
$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} 2^k = (n+1)!.$$

3. ¿Existe un 3-(7,4,2) diseño?

4. Considera una sucesión de $n^2 + 1$ números reales $(x_1, \ldots, x_{n^2+1})$ distintos dos a dos. Usando esa sucesión definimos un orden parcial en $\{1, 2, \ldots, n^2 + 1\}$ como sigue: $i \preceq j$ si $i \leq j$ y $x_i \leq x_j$. Usa el teorema de Dilworth en ese conjunto parcialmente ordenado para demostrar el teorema de Erdos-Szekeres, es decir, prueba que la sucesión de números tiene una subsucesión creciente o decreciente de longitud $n + 1$.

5. Sea n un número natural impar. Considera la matrix con entradas $a_{ij} = i + j \mod n$. Esa matriz es un cuadrado latino que usa los símbolos $0, \ldots, n-1$. Prueba que tiene un cuadrado latino ortogonal.

6. Recuerda que una baraja inglesa tiene 52 cartas, cada carta tiene uno de 13 valores y uno de 4 palos. Imagina que las cartas de una baraja se distribuyen al azar en 13 pilas de 4 cartas cada una. Prueba que siempre se puede elegir una carta de cada pila de modo que las cartas elegidas tengan valores distintos.

7. Prueba que hay más de un millón de familias de 32 subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 6\}$ tales que cualesquiera dos elementos de la familia tienen intersección no vacía.

8. Sean p y q dos números primos distintos y considera el conjunto de matrices de $p \times q$ con entradas en $\{1, \ldots, n\}$. Hacerle una rotación horizontal a una matriz es tomar su primer columna y pasarla al final; del mismo modo una rotación vertical es pasar el primer renglón de la matriz hasta abajo. Cuando una matriz se puede obtener con una serie de rotaciones a partir de otra, decimos que son equivalentes. ¿Cuántas clases de equivalencia de estas matrices hay?