Examen General. Teoría de las Gráficas
Semestre 2025-2

Duración: 4 horas. Resolver 6 ejercicios de los siguientes 9. Cada ejercicio vale $\frac{5}{3}$ *puntos y la calificación mínima para aprobar es 6. (Si se entregan más de 6 ejercicios, se calificará sobre los 6 ejercicios de menor puntaje).*

1.- Muestra que el producto cartesiano (producto cuadro) de dos gráficas vértice-transitivas es vértice-transitivo.

2.- Sea G una gráfica sin triángulos tal que $\delta(G) > \frac{2n}{5}$. Muestra que G es bipartita.

3.- Resuelva los siguientes incisos.

a) Muestra que toda digráfica con un camino cerrado dirigido de longitud impar contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

b) Usando *a)*, muestra que toda digráfica fuerte que contiene un ciclo de longitud impar (no necesariamente dirigido) contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

4.- Sea G una gráfica conexa y x un vértice de G. Un árbol generador T de G es llamado un x-árbol de distancia si para todo vértice $y \in V(G)$ tenemos que $d_T(x, y) = d_G(x, y)$.

a) Muestra que dado cualquier vértice $x \in V(G)$, G tiene un x-árbol de distancia

b) De *a)* deduce que toda gráfica conexa de diámetro d tiene un árbol generador de diámetro a lo más $2d$.

5.- Dada una gráfica G, el número de cruce de G, $cr(G)$, es el menor número de cruces de aristas en un dibujo en el plano de G. Sea $cr(K_n)$ el número de cruce de K_n. Muestra que $\frac{cr(K_n)}{\binom{n}{4}}$ es una función de n monótona creciente.

6.- Sea G una gráfica k-crítica (en términos del número cromático) con un conjunto de corte por vértices formado por la pareja $\{u, v\}$. Muestra que $d_G(u)+d_G(v) \geq 3k-5$.

7.- Sea G una gráfica y sea (X, Y) una partición de $V(G)$ tal que $G[X]$ y $G[Y]$ son ambas k-coloreables. Muestra que si el conjunto de corte $[X, Y]$ tiene a lo más $k-1$ aristas, entonces G también es k-coloreable.

8.- Sea G una gráfica con número de independencia α y número de conexidad κ. Muestra que si $\alpha \leq \kappa + 1$ entonces G es trazable (Teorema de Chvátal-Erdös).

9.- Sea G una gráfica conexa no separable y sean x, y dos vértices de G.

a) Muestra que G es bipartita si y solo si todas las xy-trayectorias en G tienen la misma paridad.

b) De *a)* deduce que toda arista de una gráfica no separable no bipartita está contenida en un ciclo impar.