EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD
SEMESTRE 2025-II, 5 DE AGOSTO DE 2025

Duración: 6 horas
Instrucciones:
1. La calificación aprobatoria mínima es de 5 puntos.
2. Cada problema vale 1 punto.
3. Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
4. Puede suponer cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

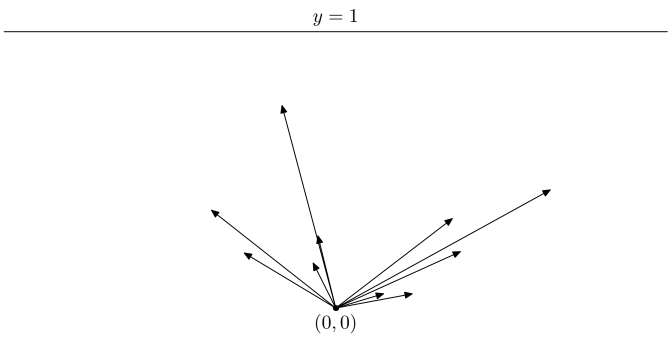
Problema 1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Para $A, B \in \mathcal{F}$ defina $d(A,B) = \mathbb{P}(A \triangle B) = \mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B))$. Demuestre

1.1 $d(A,B) \geq 0$ y que $d(A,B) = 0$ si $A = B$.
1.2 $d(A,B) = d(B,A)$.
1.3 la desigualdad del triángulo para d, i.e. $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$. *Sugerencia: Utilice que $C \cup C^c = \Omega$ y que $B \cup B^c = \Omega$.*

Problema 2. Sea (X,Y) un vector aleatorio en $\mathbb{R}^2$ que admite densidad conjunta. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible tal que $\mathbb{E}[|g(X)|] < \infty$.

2.1 Defina rigurosamente (y de forma general) a la esperanza condicional $\mathbb{E}[g(X) \mid Y]$.
2.2 Asumiendo que $f_Y(y) > 0$ para casi todo y, defina $h(y) := \mathbb{E}[g(X) \mid Y = y]$ usando la densidad conjunta de (X,Y).
2.3 Demuestre que
$$\mathbb{E}[g(X) \mid Y] = h(Y).$$

Problema 3. Considere la recta en el plano (x,y) dada por $y = 1$. Se coloca una pelota de fútbol en el origen y se patea en una dirección aleatoria uniforme hacia la recta.



3.1 ¿Cómo se distribuye la posición (denotada por X) en la que la pelota cruza la recta? *Sugerencia:* Encuentre la distribución y luego la densidad o, con cambio de variable, directamente la densidad.
3.2 ¿Dicha distribución tiene esperanza finita? *Sugerencia: Utilice la densidad de X.*
3.3 Asuma que la función característica de X es $u \mapsto e^{-|u|}$. Si $X_1, \ldots, X_n \sim X$ son i.i.d. , ¿Cómo se comparan las distribuciones del promedio $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ y de X?

Problema 4. Decimos que una sucesión de variables aleatorias $\{X_n : n \geq 1\}$ es completamente convergente a X si para toda $\epsilon > 0$ ocurre que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) < \infty$. Muestre que para sucesiones de variables independientes, convergencia completa es equivalente a convergencia casi segura. Encuentre una sucesión de variables (dependientes) que converja casi seguramente pero no completamente.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. En el sistema M/M/1 los usuarios llegan a una única ventanilla como un proceso Poisson de tasa λ y hacen una única fila. Solo se tiene una caja que los atiende. Cada persona pasa un tiempo pasa un tiempo exponencial (μ) en la ventanilla y después se va. Entonces la siguiente persona en la linea entra a la caja. La M se refiere a que la llegada de clientes es Markoviana (Poisson), la segunda M se refiere a que la salida es Markoviana (exponencial) y el 1 a que hay una única ventanilla. Encuentre la distribución estacionaria de tal sistema M/M/1 si $\rho := \lambda/\mu < 1$. ¿Qué pasa si $\rho \geq 1$?

Problema 6. Sean $(B_i)_{i\geq 1}$ variables independientes que toman los valores 1 y -1 con probabilidad 1/2. Definamos a las sumas parciales de la *serie armónica con signos aleatorios* por medio de:

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{i}$$

6.1 Pruebe que $X = (X_n)$ es una martingala respecto de una filtración que usted especificará.
6.2 ¿En qué sentido converge X? ¿Tiene sentido entonces la serie $\sum_{i=1}^{\infty} B_i/i$?
6.3 ¿La serie $\sum_{i=1}^{\infty} B_i/i$ puede converger absolutamente?

Problema 7. Sea B un movimiento Browniano y b un puente Browniano entre 0 y x, que interpretaremos como $(B_t, t \in [0,1])$ condicionado por el evento de probabilidad cero $\{B_1 = x\}$. El objetivo del problema es probar que

$$\mathbb{P}(\max_{s\in[0,1]} b_s > y) = e^{-2y(y-x)}.$$

7.1 Recuerde el principio de reflexión y explique cómo se utiliza la propiedad de Markov fuerte en su demostración, para obtener (para $x \leq y$):

$$\mathbb{P}(B_1 < x, \max_{s\in[0,1]} B_s > y) = \mathbb{P}(B_1 > 2y - x).$$

7.2 Derive lo anterior respecto de x y calcule $\mathbb{P}(\max_{s\in[0,1]} b_s > y) = \mathbb{P}(\max_{s\in[0,1]} B_s > y | B_1 = x)$.
7.3 Pruebe que la expresión obtenida efectivamente es la cola de una distribución en $[x, \infty)$.

Problema 8. Sea T una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda > 0$. Sea X el proceso estocástico definido mediante

$$X_t = \begin{cases} 0 & t < T \\ T - t & t \geq T \end{cases}.$$

Responda y justifique su respuesta a las siguientes preguntas.

8.1 ¿Es X un proceso de Markov con trayectorias continuas?
8.2 ¿Es X un proceso de Markov fuerte?