Problemas para Examen General de Medios Continuos

1. Sea el sistema con Langangiano

$$L = \frac{1}{2}w(q)||\dot{q}||^2, \quad w(q) = \frac{1}{\sqrt{1-||q||^2}}$$

para $q \in D = \{q \in \mathbf{R^2} : ||\mathbf{q}|| < \mathbf{1}\}$, donde $||\cdot||$ es la norma euclideana en $\mathbf{R}^2$.

   (a) Escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange y checar la conservación de la energia E y momento angular M

$$E(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}w(q)||\dot{q}||^2, \quad M = w(q)q \times \dot{q},$$

   donde $v \times u = v_1u_2 - v_2u_1$. Identifique las simetrias correspondientes.

   (b) Escribir el momento canónico y el Hamiltoniano del sistema.

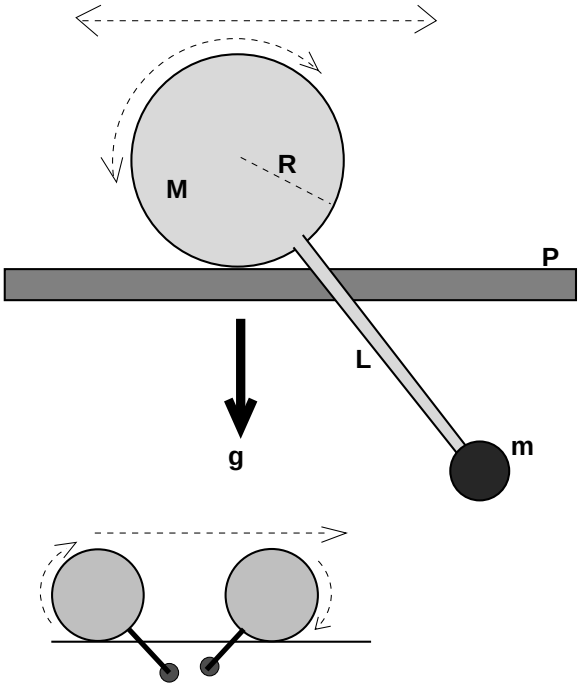
   (c) Haz el plano fase del subespacio invariante de las soluciones con momento angular $M = 0$. Es posible tener trayectorias llegan a la frontera de D en un tiempo finito ? Interpretar.

2. Un disco de radio R y de masa M rueda sin resbalar por el plano P. El disco está conectado a una masa m por medio de una barra rígida que no tiene masa (la barra esta rígidamente conectado al disco) y dicha barra es de longitud L tal como se ve en la figura. Todo este sistema mecánico esta sometido a la fuerza de gravedad.

   a) ¿Cuántos grados de libertad tiene este sistema?

   b) Determine las ecuaciones de movimiento de dicho sistema.

   c) Encuentre los puntos de equilibrio y determine la frecuencia de oscilacion para oscilaciones pequeñas.



3. Resuelve el problema de la curva Braquistócrona, como la curva del descenso más rápido.

Figura 1: Braquistócrona.

a) El tiempo para ir de un punto A a B está dado por,

$$t = \int_A^B \frac{dS}{v}$$

donde S es la distancia a lo largo de la curva y v es la velocidad.

b) Justifica porque la conservación de la energía implica que

$$v = \sqrt{y},$$

suponiendo que $2g = 1$.

c) Supongamos que la curva está parametrizada de la forma $y = y(x)$. Deriva la expresión para $dS = \sqrt{1 + (y')^2}dx$

Esto da una expresión para el tiempo en términos de la integral de una función Lagrangiana

$$t = \int_A^B \mathcal{L}(y', y)dx$$

d) Calcula las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes y resuélvelas.

e) Concluye que la solución está dada por la cicloide,

$$x = \frac{1}{2}k^2\left[(\theta - \sin\theta)\right]$$
$$y = \frac{1}{2}k^2\left[(1 - \cos\theta)\right].$$