EXAMEN GENERAL DE TOPOLOGÍA ALGEBRAICA
2025-II

Posgrado en Ciencias Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Instrucciones:

1. *Este examen tiene 6 problemas, cada uno de ellos vale 20 puntos.*
2. *Los problemas marcados con (*) son obligatorios.*
3. *Para aprobar el examen se requiere de un mínimo de 70 puntos (90 puntos o más es aprobado con mención honorífica).*
4. *El tiempo para resolver el examen es de 4 horas.*
5. *Justifique claramente sus respuestas.*

(*) Problema 1. Resuelva cada uno de los siguientes incisos:

a) Considere un disco D^2 encajado en $\mathbb{R}P^2$. Demuestre que $\mathbb{R}P^2 \setminus D^2$ es homeomorfo a una banda de Möbius.

b) Sea $S_{g,n}$ una superficie orientada de género g con n círculos frontera. Muestre que $\chi(S_{g,n}) = 2 - 2g - n$.

(*) Problema 2. Construya un cubriente $S^1 \vee S^1$ con tres hojas para demostrar que $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ no es abeliano.

(*) Problema 3. Para X un CW complejo finito y F un campo, muestre que la característica de Euler se puede calcular mediante la fórmula $\chi(X) = \sum_n (-1)^n \dim H_n(X; F)$, la suma alternada de las dimensiones de los espacios vectoriales $H_n(X; F)$.

Problema 4. Sea $X = \{(p, q) : p \neq -q\} \subset S^n \times S^n$. Defina un mapa $f : S^n \to X$ por $f(p) = (p, p)$. Muestre que f es una equivalencia homotópica.

Problema 5. Considere el círculo unitario S^1 en el plano complejo y tome el mapa $\phi_k : S^1 \to S^1$ dado por $\phi_k(z) = z^k$. Calcule todos los grupos de homología con coeficientes enteros de $X_k = S^1 \cup_{\phi_k} D^2$.

Problema 6. Es bien sabido que si $f : X \to Y$ es un cubriente con X y Y espacios arco-conexos, entonces $f_\# : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ es un monomorfismo. ¿Es cierto que $f_* : H_1(X) \to H_1(Y)$ es un monomorfismo? Dé una demostración o un contraejemplo.