Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Topología General Semestre 2025-2

Instrucciones

- La duración del examen es de 4 horas.
- El examen consta de 6 preguntas, cada una con un puntaje asignado.
- El total de puntos es 14. Para aprobar el examen es necesario obtener al menos 9 puntos. Para recibir mención honorífica es necesario obtener al menos 12 puntos.

Preguntas:

1. (**2 puntos**) Sea $S = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a, b \in \mathbb{Q};\ b \geq 0\}$. Para cada $(a,b) \in S$ y cada $\epsilon > 0$, se define $V_\epsilon(a,b) = \{(a,b)\} \cup \{(r,0) \in S : \left|r - \left(a + \frac{b}{\sqrt{3}}\right)\right| < \epsilon$ o $\left|r - \left(a - \frac{b}{\sqrt{3}}\right)\right| < \epsilon\}$ si $b > 0$ y $V_\epsilon(a,b) = \{(r,0) \in S : |r - a| < \epsilon\}$ si $b = 0$. Sea $\mathcal{B} = \{V_\epsilon(x) : x \in S,\ \epsilon > 0\}$. Demuestra que $\mathcal{B}$ es una base para una topología τ de S y que el espacio (S, τ) es numerable, conexo y T_2, pero si U y V son abiertos no vacíos, entonces sus cerraduras se intersectan.

2. **(2 puntos)** Un espacio métrico (X, d) es totalmente acotado si para cada $\epsilon > 0$ existe un subconjunto finito A de X tal que para cada $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $d(a,x) < \epsilon$. Prueba que un espacio métrico X es totalmente acotado si y sólo si toda sucesión en X tiene una subsucesión que es de Cauchy.

3. **(3 puntos)** Para cada $\alpha \in [2,3]$, sea $[0,1]_\alpha$ una copia del intervalo $[0,1]$. Sea $X = \prod_{\alpha \in [2,3]} [0,1]_\alpha$ con la topología caja. Prueba que el conjunto

$$\mathbf{W} = \{f \in X : f \text{ es continua}\}$$

es un subconjunto cerrado de X.

4. **(3 puntos)** Sea U un conjunto abierto y conexo de un espacio topológico X. Sea A un conjunto cerrado de X con interior vacío. Si cada punto de A tiene una base de vecindades β tal que, para cada $B \in \beta$, $B - A$ es conexo, demuestra que $U - A$ es abierto y conexo en X.

5. **(2 puntos)** Sea (X, τ) un espacio compacto con la siguiente propiedad: siempre que C es un espacio compacto y $f : C \to X$ es una biyección continua, se tiene que f es un homeomorfismo. Demuestre que cada subconjunto compacto de (X, τ) es cerrado.

6. **(2 puntos)** Dados un espacio topológico X y $p \in X$. La *casi componente* de p en X se define como

$$Q(p, X) = \bigcap \{A \subset X : p \in A \text{ y } A \text{ es abierto y cerrado en } X\}.$$

Dados dos espacio X y Y, y un punto $p = (p_1, p_2) \in X \times Y$, prueba que $Q(p, X \times Y) = Q(p_1, X) \times Q(p_2, Y)$.