

Seminario: Problemas de Realización en Grupos Modulares de Superficies

Dr. Nestor Colin Hernandez
Semestre 2026-2

Resumen: El objetivo de este seminario es introducir a los estudiantes en los problemas de realización de Nielsen, los cuales pueden formularse en términos de cuándo un subgrupo del grupo modular de una superficie puede realizarse como un subgrupo del grupo de difeomorfismos (o de homeomorfismos) de la superficie, así como en sus generalizaciones. A través de exposiciones de los participantes, se estudiarán las distintas técnicas empleadas en los resultados de no realización, tales como las obstrucciones cohomológicas y las derivadas de la dinámica de los grupos de difeomorfismos. Asimismo, se discutirán casos en los que dichas realizaciones sí existen y se presentarán ejemplos concretos en superficies orientables. El seminario seguirá de cerca el artículo panorámico *Realization Problems for Diffeomorphism Groups* de Kathryn Mann y Bena Tshishiku (2019), complementado con referencias clásicas.

Lugar: Aula de seminarios (Instituto de Matemáticas Unidad Oaxaca en la sede alameda de León)

Temario

1. Introducción

1. Definición del problema de Nielsen y su generalización.
2. Interpretación en términos de haces planos y monodromía.
3. Realización de subgrupos finitos (Nielsen, Fenchel, Kerckhoff).
4. Problemas de realización en dimensión superior.

2. Técnicas cohomológicas

1. Uso de clases de cohomología como obstrucciones.
2. La clase de Euler como obstrucción.
3. La desigualdad de Milnor–Wood.
4. Grupos de trenzas y “point pushing”.
5. El teorema de Morita:
 - a) Las clases de Morita–Mumford–Miller (MMM).
 - b) No existencia de secciones $\text{Diff}(\Sigma_g) \rightarrow \text{Mod}_g$.

3. Obstrucciones dinámicas a la realización

1. No-realización de grupos de gérmenes:
2. Técnicas C^1 : representaciones lineales y estabilidad de Thurston.
3. Teorema de Farkas–Handel.
 - a) No-realización de subgrupos generados por pseudo-Anosovs.
4. Grupos no discretos: continuidad forzada.

4. Resultados positivos

1. Casos de realización en superficies de baja complejidad.
2. Realizaciones geométricas: grupos abelianos libres y grupos de Artin de ángulo recto.
3. Realizaciones en grupos de gérmenes y en superficies con frontera.
4. Realización de Nielsen para superficies de tipo infinito.
5. Realización de Nielsen de superficies no orientables.
6. Problemas abiertos destacados.

Bibliografía

- K. Mann, B. Tshishiku, *Realization Problems for Diffeomorphism Groups*, Proc. Symp. Pure Math. **102** (2019).
- D. Farb, D. Margalit, *A Primer on Mapping Class Groups*, Princeton University Press, 2012.
- S. Morita, *Characteristic Classes of Surface Bundles*, Invent. Math. **90** (1987).
- J. Franks, M. Handel, *Non-realization of Mapping Class Groups by Diffeomorphisms*, Comm. Anal. Geom. **16** (2009).
- A. Marković, D. Šarić, *Homeomorphism Groups and Non-realization*, 2008.
- J. Salter, B. Tshishiku, *Point-pushing and Thurston Stability*, Geom. Topol. **20** (2016).
- G. Nariman, *Flat Surface Bundles and Braid Groups*, 2018.
- É. Ghys, *Groups Acting on the Circle*, Enseign. Math. **37** (1991).
- W. Thurston, *Foliations and Groups of Diffeomorphisms*, Bull. AMS **80** (1974).
- N. Colin y M. A. Xicoténcatl, *The Nielsen realization problem for non-orientable surfaces*, Topology and its Applications, Vol. 353, 2024, 108957. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2024.108957>