

Examen General de Conocimientos: Álgebra Moderna. Semestre 2026-II.

3 de agosto de 2026.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. Escoge y resuelve solamente 3 ejercicios de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 3 ejercicios en cada sección, se calificarán los primeros 3. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Sea G un grupo finito que tiene un subgrupo H de índice p , donde p es el menor primo que divide al orden de G . Demuestra que H es un subgrupo normal de G .
2. (a) Sean G un grupo finito y H un p -subgrupo de G . Demuestra que

$$[G : H] \equiv [N_G(H) : H] \pmod{p}.$$

Sugerencia: Define una acción de H sobre el conjunto de las clases laterales izquierdas de H y analiza los puntos fijos de esta acción.

(b) Sea G un p -grupo finito no trivial. Demuestra que cualquier subgrupo propio de G está contenido propiamente en su normalizador.

3. Sea G un grupo no abeliano de orden p^3 con p primo. Demuestra que $|Z(G)| = p$, $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ y que $Z(G)$ es el subgrupo conmutador de G .
4. Sea G un grupo de orden finito. Demuestra que si G es cíclico entonces para cada divisor positivo d del orden de G , existe un único subgrupo K de G de orden d .
5. Demuestra que si un grupo G es soluble y $\varphi : G \rightarrow H$ es un morfismo de grupos, entonces $\text{Im}(\varphi)$ también es soluble.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Sea $p(x) \in F[x]$ irreducible de grado n y sea K la extensión de Kronecker correspondiente

$$K = F[x]/\langle p(x) \rangle.$$

Demuestra que la extensión K/F es finita de grado n y exhibe una base de ${}_F K$.

2. Sea R un dominio conmutativo con campo de fracciones F . Supón que $f(x) \in R[x]$ es mónico de grado n y que $f(x) = a(x)b(x)$ para algunos $a(x), b(x) \in F[x]$ ambos mónicos y de grado menor que n . Si $a(x) \notin R[x]$, demuestra que R no es un DFU .
3. Considera una extensión K/F y $a \in K$. Demuestra que si $[F(a) : F] = 2k + 1$ para algún k natural, entonces $F(a) = F(a^2)$.
4. Sea $f(x) \in F[x]$ de grado $n > 0$. Si K es campo de descomposición de $f(x)$, demuestra que $[K : F] \leq n!$
5. Demuestra que el polinomio $f(x) = x^5 - 4x + 2$ no es soluble por radicales. Sugerencia: Nota que si $E/\mathbb{Q}$ es un campo de descomposición de $f(x)$ contenido en $\mathbb{C}$, entonces $[E:\mathbb{Q}]$ es divisible por cinco y que $f(x)$ tiene exactamente tres raíces reales.