

Instrucciones. Tiene 3 horas a partir de la hora de inicio de su lectura para entregar el examen. Habrá un periodo corto de aproximadamente 10 minutos de tiempo para lectura de preguntas antes de comenzar el trabajo para el examen. Entregue una sección de respuestas y adjunte en una sección separada su trabajo en borrador. Se le recomienda que comience a redactar la sección de respuestas al menos 15 minutos **antes** de la hora límite. Tome en cuenta que tiene solo tres horas para trabajar en su examen. En la esquina superior derecha de cada página, escriba su nombre completo. Los exámenes que no cumplan con las instrucciones, o que no sean legibles (e.g. respuestas con tachones o borrones) no serán calificados.

Problema	Max	Puntos
1	30	
2	20	
3	40	
4	10	
Total:	100	

Preguntas

1. Reglas de cuadratura, cambio de intervalo, reglas compuestas

Considere una regla de cuadratura básica de n puntos definida para el intervalo estándar $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i). \quad (1)$$

- (a) (10 puntos) Determine los pesos y las abscisas (o nodos) de una regla de cuadratura asociada para el intervalo general $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i f(\tilde{x}_i).$$

- (b) (10 puntos) ¿Tiene la regla de cuadratura en $[a, b]$ el mismo orden polinomial (o posiblemente diferente) que la regla original en $[-1, 1]$? Justifique su respuesta.
- (c) (10 puntos) Construya la regla de cuadratura compuesta asociada basada en una partición uniforme del intervalo general $[a, b]$ en N subintervalos de igual longitud.

2. Problemas de mínimos cuadrados lineales

Describa y explique:

- (a) (10 puntos) Las ecuaciones normales,
- (b) (10 puntos) el método de ortogonalización QR para resolver el problema de mínimos cuadrados lineales:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - Ax\|_2, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Discuta brevemente las ventajas y desventajas de los dos métodos.

3. Matrices y normas matriciales

Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y sean $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, tales que:

$$\alpha = \min_{1 \leq k \leq n} \left(|a_{kk}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right), \quad \beta = \min_{1 \leq k \leq n} \left(|a_{kk}| - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |a_{ik}| \right).$$

- (a) (10 puntos) Demuestre que A es no singular.
- (b) (10 puntos) Demuestre que $\|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} \geq \alpha$.
- (c) (10 puntos) Demuestre que $\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\alpha}$.
- (d) (10 puntos) Demuestre que $\|A^{-1}\|_1 \leq \frac{1}{\beta}$.

4. (10 puntos) Factorización de Schur

¿Qué es la factorización de Schur de una matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$? Describa las propiedades de las matrices involucradas.