



POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Complejo

Julio-Agosto 2026

Semestre 2026-2

Puntos: 36 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
 - El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja, su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja y deberá enumerar todas la hojas.
-

En lo que sigue denotamos $D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.

1. (6 puntos) Sea $T(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Demuestra que:
 - a) T es biyectiva exactamente cuando $\lambda \bar{\lambda} \neq \mu \bar{\mu}$.
 - b) T es una isometría, i.e., $|T(z)| = |z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, si y sólo si, $\lambda \mu = 0$ y $|\lambda + \mu| = 1$.
2. (6 puntos) Considera las curvas $\gamma_1(t) = 8e^{i3t} - 4e^{i2t}$ y $\gamma_2(t) = \frac{1}{8}e^{i3t} - \frac{1}{4}e^{i2t}$ ambas con $t \in [0, 2\pi]$. Calcula el índice de cada curva con respecto al origen.
Sugerencia: considera la función $f(z) = z^2(z - 1)$ y usa el principio del argumento.
3. (6 puntos) Sean $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ dos enteros positivos primos relativos entre sí, y $D \subset \mathbb{C}$ un dominio en $\mathbb{C}$. Demuestra que una función $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en D si, y sólo si f^p y f^q lo son. ¿Sigue siendo cierto el resultado si $\text{mcd}(p, q) = d > 1$? En caso negativo, exhibe un contraejemplo explícito.
4. (6 puntos) Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función entera. Demuestra lo siguiente:
 - a) Si existen $n \in \mathbb{N}$ y constantes positivas $M, R > 0$ tales que $|f(z)| \leq M|z|^n$, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus D_R(0)$, entonces f es una función polinomial de grado a lo más n .
 - b) Si existen $m \in \mathbb{N}$ y constantes positivas $M, R > 0$ tales que $|f(z)| \geq M|z|^m$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus D_R(0)$, entonces f es una función polinomial de grado al menos m .
5. (6 puntos) Sea z_0 un punto del disco unitario $D_1(0)$ y sea $\gamma = \partial D_1(0)$ la circunferencia unitaria alrededor del cero recorrida una vez en sentido positivo. Muestra que:

$$\int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z - z_0|^2} = \frac{2\pi}{1 - |z_0|^2}.$$

Sugerencia: Nota que si $z = e^{i\theta}$, entonces $dz = ie^{i\theta} d\theta$, usa lo anterior para obtener que $|dz| = \frac{dz}{iz}$, y transforma la integral a una de la forma $\int_{\gamma} g(z) dz$ para alguna función compleja $g(z)$.

6. (6 puntos) Sean $f, g : \overline{D_1(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones analíticas en $D_1(0)$, continuas en $\overline{D_1(0)}$ tales que $|f(z)| < 4$ para todo z con $|z| = 1$, y $f(z) = z^2 g(z)$ para todo z con $|z| \leq \frac{1}{2}$. Muestra que $|f(z)| < 1$ para todo z con $|z| \leq \frac{1}{2}$.