



POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Funcional

Julio-Agosto 2026

Semestre 2026-2

Puntos: 36 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
 - El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja, su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja y deberá enumerar cada hoja.
-

1. (6 puntos) Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \sigma(F, F^*))$ un operador lineal y continuo, donde E está dotado de la topología inducida por la norma de E y $\sigma(F, F^*)$ denota la topología débil de F . Demuestra que T es continuo de $(E, \|\cdot\|_E)$ en $(F, \|\cdot\|_F)$ donde $\|\cdot\|_F$ denota la norma del espacio F .
2. (6 puntos) Sea H un espacio de Hilbert y sea (u_n) una sucesión en H que converge débilmente a $u \in H$, esto es, $u_n \rightarrow u$ en $\sigma(H, H)$. Supongamos que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_H \leq \|u\|_H$. Demuestra que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_H = 0$.
3. (6 puntos) Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T : E \rightarrow F$ un operador compacto. Supongamos que $\dim E = \infty$. Demuestra que existe una sucesión (u_n) en E tal que $\|u_n\|_E = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tu_n\|_F = 0$.
4. (6 puntos) Sea X un espacio de Banach y sea Y un espacio vectorial normado. Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ una familia de operadores lineales acotados. Supongamos que para cada elemento $x \in X$ y para cada $f \in Y^*$ se tiene que

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} |f(Tx)| < \infty.$$

Demuestre que la familia está uniformemente acotada, esto es, $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| < \infty$.

5. (6 puntos) Sea X un espacio de Banach reflexivo y $\phi \in X^*$. Prueba que ϕ alcanza su norma es decir, existe $x_0 \in X$ con $\|x_0\| = 1$ tal que $\phi(x_0) = \|\phi\|$.
6. (6 puntos) Sea

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

una serie de potencias absolutamente convergente en el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ con $R > 0$.

Sea H un espacio de Hilbert complejo y sea $T : H \rightarrow H$ un operador lineal acotado tal que $\|T\| \leq R$. Demuestra que el límite $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n T^n$ existe en el espacio de operadores lineales acotados y que el operador definido por $h(T) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ satisface la desigualdad $\|h(T)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|T\|^n$.

Además prueba que si un operador lineal acotado $S : H \rightarrow H$ conmuta con T , es decir, $ST = TS$, entonces S conmuta con $h(T)$, es decir, $Sh(T) = h(T)S$.

Nota: T^n denota la composición de T consigo mismo n veces, con la convención de que T^0 es el operador identidad en H .