

Examen General de Estadística

Semestre 2026-2 (Agosto 2026)

Instrucciones: Deberá responder todas las preguntas justificando sus respuestas.

Se requieren 24 de 40 puntos para aprobar el examen.

Tiempo máximo de examen: 5 horas (9:00-14:00 hrs.).

Justifica tus respuestas con los procedimientos correspondientes.

Inferencia Estadística

1. Sea $X_{1:n}$ una m.a. de $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$, $0 < \theta < 1$. Sea $\eta = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = 1)$.

- (a) Expresa $\eta = \tau(\theta)$ explícitamente como función de θ . [Valor: 1 punto]
- (b) Obtén el EMV $\hat{\eta}_n$ de η vía invarianza. [Valor: 2 puntos]
- (c) Obtén la expresión de un intervalo asintótico de confianza de nivel $(1 - \alpha)100\%$ para η vía método delta. [Valor: 1 punto]
- (d) Encuentra un estimador W insesgado para η y la estadística suficiente completa T para θ . Calcula el estimador UMVUE $\delta(T) = \mathbb{E}_\theta[W \mid T]$. [Valor: 3 puntos]
- (e) Describe brevemente el algoritmo bootstrap paramétrico para un intervalo de confianza de nivel $(1 - \alpha)100\%$ para η usando $\delta(T)$. [Valor: 1 punto]

2. Sea $X_{1:n}$ una m.a. de densidad $f(x \mid \theta) = \theta x^{\theta-1} I(0 < x < 1)$, $\theta > 0$.

- (a) Encuentra una estadística suficiente mínima para θ . [Valor: 1 punto]
- (b) Obtén el EMV $\hat{\theta}_n$. [Valor: 2 puntos]
- (c) Muestra que $\hat{\theta}_n$ es consistente (hint: ley de los grandes números). [Valor: 1 punto]
- (d) Exhibe una cantidad pivotal exacta para θ y su distribución. [Valor: 2 puntos]

3. Sea $X_{1:n}$ una m.a. de $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Sea $\tau(\lambda) = e^{-\lambda}(1 + \lambda) = \mathbb{P}(X \leq 1)$.

- (a) Encuentra un estimador insesgado W de $\tau(\lambda)$. [Valor: 2 puntos]
- (b) Usa el teorema de Rao-Blackwell para obtener el UMVUE $\delta(T)$ donde $T = \sum_{i=1}^n X_i$ (estadística suficiente completa). [Valor: 2 puntos]
- (c) Calcula $\text{Var}(\delta(T))$. [Valor: 2 puntos]

Inferencia Bayesiana

4. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a. de $N(x \mid \mu, h)$ con μ, h desconocidos. Se asigna la distribución *prior* Normal-Gamma:

$$p(\mu, h) = N(\mu \mid \omega, h\tau) \cdot \text{Ga}(h \mid \alpha, \beta),$$

con $\omega, \tau, \alpha, \beta$ conocidos.

- (a) Demuestra que la correlación posterior entre μ y h es cero. [Valor: 2 puntos]
- (b) ¿Son μ y h independientes *a posteriori*? Argumenta rigurosamente (usa las condicionales y marginales). [Valor: 2 puntos]
- (c) Encuentra la distribución marginal posterior de μ . [Valor: 2 puntos]

5. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a. de $\text{Poisson}(\theta)$, $\theta > 0$ con *prior* conjugada $\theta \sim \text{Ga}(a, b)$. Considera la función de pérdida $L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2 / \theta$.

- (a) Encuentra el estimador bayesiano óptimo $\delta^\pi(x)$ de θ . [Valor: 3 puntos]
- (b) Encuentra la distribución predictiva del número de eventos en una nueva observación $Y \sim \text{Poisson}(\theta)$. [Valor: 3 puntos]
- (c) Supongamos que $a = 2$, $b = 1$, $n = 20$ y $\sum_{i=1}^n x_i = 7$. Calcula la probabilidad predictiva $\mathbb{P}(Y = 0 \mid X_{1:n} = x_{1:n})$. [Valor: 1 punto]

6. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a. de $\text{Bernoulli}(p)$, $p \in (0, 1)$ con *prior* $\text{Beta}(\alpha, \beta)$.

- (a) Encuentra la distribución posterior de p . [Valor: 2 puntos]
- (b) Encuentra el estimador bayesiano de p bajo pérdida cuadrática. [Valor: 2 puntos]
- (c) Muestra que cuando $\alpha, \beta \rightarrow 0$ el estimador converge al MAP (máximo *a posteriori*) con respecto a la distribución *prior* impropia de Haldane, dada por la densidad $p \mapsto p^{-1}(1-p)^{-1}$. Compara con los estimadores MAP y bayesiano bajo pérdida cuadrática, con *prior* de Jeffreys $\text{Beta}(1/2, 1/2)$. [Valor: 3 puntos]