

EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD
SEMESTRE 2026-II, AGOSTO DE 2026

Duración: 6 horas

Instrucciones:

1. La calificación aprobatoria mínima es de 5 puntos.
2. Cada problema vale 1 punto.
3. Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
4. Puede suponer cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. PROBABILIDAD

Problema 1. Sea $(X_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución *Bernoulli*(p). Definamos $T_0 = 0$ y, para $n \geq 1$,

$$T_n = \inf\{k > T_{n-1} : X_k = 0\}.$$

Consideremos la n -ésima *racha*, definida por $R_n = T_n - T_{n-1} - 1$, $n \geq 1$, y el evento $A_n = \{R_n \geq \lfloor \log_2 n \rfloor\}$. Determine, en términos de $p \in (0, 1)$, el valor de $\mathbb{P}(A_n \text{ ocurre para una infinidad de índices } n)$. Identifique el valor crítico $p_c \in (0, 1)$ en el que la probabilidad anterior cambia y analice qué ocurre cuando $p = p_c$.

Problema 2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

- 2.1 Sea $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sub- σ -álgebra. Demuestre que $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ es el único elemento Y de $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ tal que

$$\mathbb{E}((X - Y)Z) = 0 \quad \text{para todo } Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}).$$

- 2.2 Sea $(X, Y_1, \dots, Y_n)$ un vector gaussiano centrado en $\mathbb{R}^{n+1}$, con $Y_1, \dots, Y_n$ independientes y $\text{Var}(Y_i) > 0$ para todo i . Pruebe que existe un vector $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbb{E}(X \mid Y_1, \dots, Y_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i \quad \text{c.s.}$$

Problema 3. Admita que existe una variable aleatoria X_1 absolutamente continua con función característica

$$\varphi_{X_1}(t) = T(t) = (1 - |t|)^+.$$

- 3.1 Pruebe que T satisface: $T(0) = 1$, T es continua, T es acotada, T es integrable, $T(-t) = \overline{T(t)}$. Mencione algunas propiedades que hereda la variable X_1 de estos hechos. *Nota: la densidad correspondiente es $f_{X_1}(x) = \frac{1 - \cos x}{\pi x^2}$.*
- 3.2 Sea $T_*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la extensión 2-periódica de $T|_{[-1,1]}$: para cada $t \in \mathbb{R}$ existe un único $k \in \mathbb{Z}$ con $t - 2k \in [-1, 1]$, y se define $T_*(t) = T(t - 2k)$. Pruebe que T_* es la función característica de una variable aleatoria X_2 con valores en $\pi\mathbb{Z}$. *Nota: X_2 está dada por*

$$\mathbb{P}(X_2 = \pi k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T(t) e^{-i\pi k t} dt \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}.$$

- 3.3 Observe que $T(t) = T_*(t)$ para todo $t \in [-1, 1]$, pero $T \neq T_*$ en $\mathbb{R}$. Deduzca que X_1 y X_2 no tienen la misma distribución.

3.4 Sea W una copia independiente de X_1 , también independiente de X_2 . Pruebe que

$$\varphi_{X_1+W}(t) = T(t)^2 = T_*(t)T(t) = \varphi_{X_2+W}(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Concluya que $X_1 + W \stackrel{d}{=} X_2 + W$ aunque X_1 y X_2 no tienen la misma distribución, mostrando que la *cancelación* en igualdades distribucionales falla:

$$A + B \stackrel{d}{=} A + C \quad \text{con } A \perp B, A \perp C \quad \not\Rightarrow \quad B \stackrel{d}{=} C.$$

Problema 4. Sea $(X_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media 0 y varianza 1. Definamos $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, para $n \geq 1$.

4.1 Determine la distribución límite (en el sentido de convergencia en distribución) de $S_n/\sqrt{n}$ cuando $n \rightarrow \infty$.

4.2 Demuestre que $S_n/\sqrt{n}$ no converge casi seguramente.

2. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Problema 5. Considere la cadena de Markov con valores en $E = \{1, 2, 3, 4\}$ y matriz de transición dada por

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para $x \in E$, escribimos $R_x := \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$ para el primer tiempo de retorno a x .

5.1 Dibuje en un diagrama las clases de comunicación. Muestre que la cadena es irreducible y recurrente positiva.

5.2 Deduzca la existencia de una única medida de probabilidad invariante y encuéntrala.

5.3 Deduzca el valor de $\mathbb{E}_x(R_x)$ y de $\mathbb{E}_1\left(\sum_{n=0}^{R_1-1} 1_{\{X_n=y\}}\right)$ para $x, y \in E$.

Problema 6. Sea $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión i.i.d. de variables uniformes en $(0, 1)$, $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión de constantes y $t \in (0, 1)$ fijo. Definimos

$$M_n = \sum_{i=1}^n \beta_i [\mathbf{1}_{U_i \leq t} - t], \quad n \in \mathbb{N}.$$

6.1 Pruebe que, para cada $t \in (0, 1)$, $(M_n(t), n \geq 1)$ es una martingala centrada respecto de la filtración $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \dots, U_n)$.

6.2 Suponga que $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\beta_i| < \infty$. Pruebe que las series

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \beta_i \mathbf{1}_{U_i \leq t} \quad \text{y} \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} \beta_i$$

convergen absolutamente (la primera, casi seguramente y en L_1) y que

$$M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1, \text{c.s.}} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \beta_i \mathbf{1}_{U_i \leq t} \right) - t \sum_{i \in \mathbb{N}} \beta_i.$$

6.3 Ahora suponga que $\sum_{i \in \mathbb{N}} \beta_i^2 < \infty$ pero $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\beta_i| = \infty$. Pruebe que (M_n) converge en L_2 y casi seguramente a una variable aleatoria M_∞ , pero que las series

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \beta_i \mathbf{1}_{U_i \leq t} \quad \text{y} \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} \beta_i$$

divergen (la primera, casi seguramente).

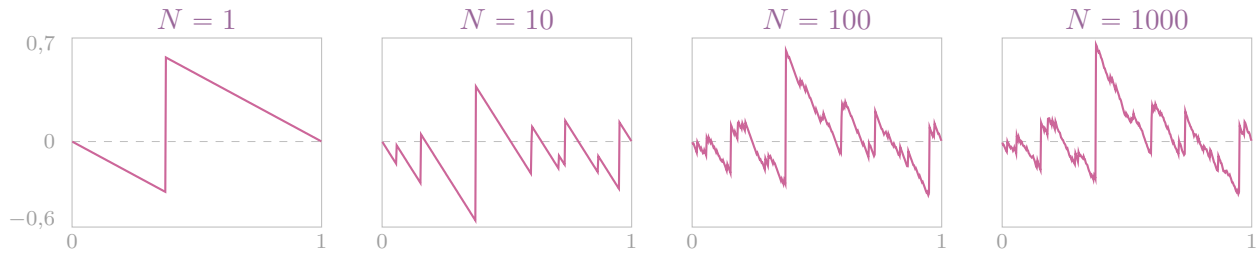


FIGURA 1. Trayectorias simuladas de $t \mapsto S_t^N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} [\mathbf{1}_{\{U_i \leq t\}} - t]$ para $N \in \{1, 10, 100, 1000\}$, con la misma realización de las uniformes (U_i) .

Problema 7. Sea $(N_t, t \geq 0)$ un proceso de Poisson de parámetro $\lambda > 0$, y $\beta > 0$. Definimos el funcional exponencial del proceso de Poisson como

$$I := \int_0^\infty \exp\{-\beta N_s\} ds.$$

7.1 Demuestre la igualdad en ley

$$I \stackrel{\text{Ley}}{=} E + e^{-\beta} \tilde{I},$$

donde $\tilde{I}$ es una v.a. que sigue la misma ley que I e independiente de E (que tiene una distribución exponencial de parámetro λ). (*Sugerencia: condicione al primer tiempo de salto y use la propiedad de Markov fuerte.*)

7.2 Utilice lo anterior para demostrar que la función generadora de momentos de I está dada por la expresión

$$\mathbb{E}(\exp\{-\theta I\}) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda + \theta e^{-\beta n}}$$

Problema 8. Asuma que en un mismo espacio de probabilidad están definidos movimientos Brownianos $B^1, B^2, \dots$ con valores en $[0, 1]$ independientes. Defina al proceso B por

$$B_t = \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} B_1^i + B_{t-\lfloor t \rfloor}^{\lfloor t \rfloor}, \quad t \geq 0,$$

Pruebe que B es un movimiento Browniano en $[0, \infty)$.